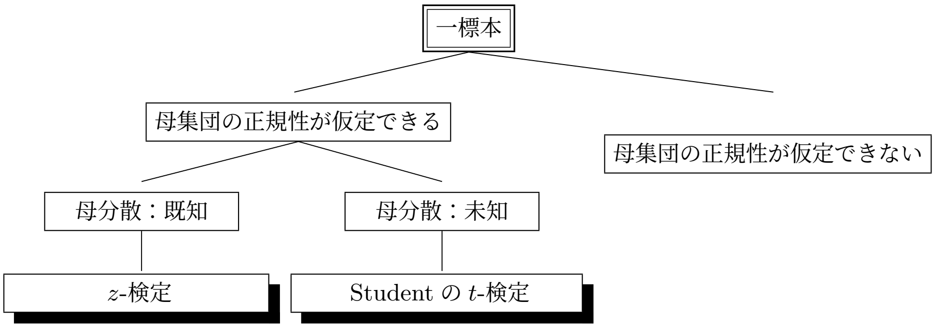
平均に関する検定

【一標本】



一標本：母集団の正規性が仮定できる ：

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$。つまり、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は、平均 μ、分散 σ^2 の正規分布に従う。

[σ^2**：既知のとき：**z**-検定**]

$$\overline{X} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1^2)\text{：標準正規分布}$$

[σ^2**：未知のとき：Student の** t**-検定**]

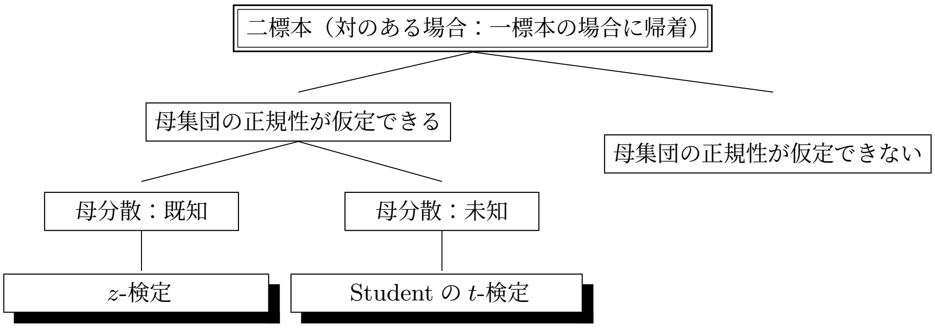
$$\left.\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \\ s^2 &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)\text{：自由度 } n-1 \text{ の } t \text{ 分布}$$

[**母集団の正規性が仮定できない**]

抽出した標本が正規分布に従っているか、特定の分布に従っているかについての検定問題は、Shapiro-Wilk 検定（正規分布のみ）や Kolmogolov-Smirnov 検定（一般の分布）によってなされる。統計的品質管理（statistical quality control）では正規確率 QQ プロットを用いることがある。この話題についてはこの pdf ファイル参照。これにより、モデルに適した分布が設定でき、その状況に合った検定手法が利用される。

または母数によらない検定（ノンパラメトリック検定）を用いることがある。

【二標本（対のある場合）】



対になった標本 ：

各個体の差 X_i が正規分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ に従う ([I] の場合に帰着できる)。

[σ^2**：既知のとき**]

$$\overline{X} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1^2)：\text{標準正規分布}$$

[σ^2**：未知のとき**]

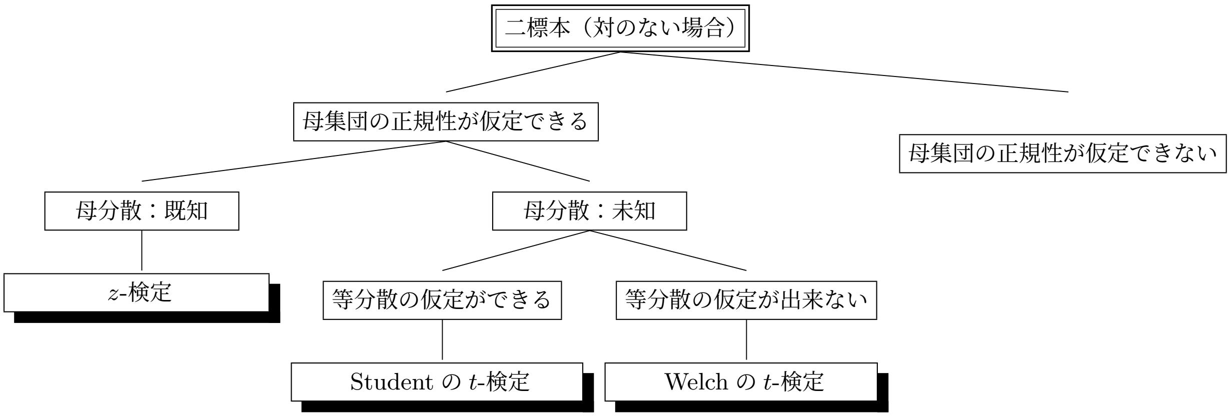
$$\left.\begin{array}{l} \overline{X} = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \\ s^2 = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)：\text{自由度 } n-1 \text{ の } t \text{ 分布}$$

[母集団の正規性が仮定できない]

抽出した標本が正規分布に従っているか、特定の分布に従っているかについての検定問題は、Shapiro-Wilk 検定（正規分布のみ）や Kolmogolov-Smirnov 検定（一般の分布）によってなされる。統計的品質管理（statistical quality control）では正規確率 QQ プロットを用いることがある。この話題についてはこの pdf ファイル参照。これにより、モデルに適した分布が設定でき、その状況に合った検定手法が利用される。

または母数によらない検定（ノンパラメトリック検定）を用いることがある。

【二標本（対のない場合）】



二標本 ：

二つの標本は $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$、$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ で互いに独立。

[**σ_1^2, σ_2^2 の値は各々既知**]

一標本のときの $z-$ 検定に帰着できる。

[**等分散性 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が分かっているが、その値が未知のとき**]

$$\left.\begin{aligned} &\overline{X} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Y_i}{m}, \\ &s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2}{n+m-2} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}} \sim t(n+m-2) \text{：自由度 } n+m-2 \text{ の } t \text{ 分布}$$

[**等分散性が仮定できなく、その値が未知のとき（Welch の t-検定）**]

上の

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}}$$

を評価する際、分散は各々の標本から計算される標本分散

$$s_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad s_2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2$$

を利用し、さらに t-分布の自由度を $n+m-2$ でなく、

$$\phi = \frac{(s_1/n + s_2/m)^2}{\dfrac{(s_1/n)^2}{n-1} + \dfrac{(s_2/m)^2}{m-1}}$$

を用いるものである。

[**母集団の正規性が仮定できない**]

抽出した標本が正規分布に従っているか、特定の分布に従っているかについての検定問題は、Shapiro-Wilk 検定（正規分布のみ）や Kolmogolov-Smirnov 検定（一般の分布）によってなされる。これにより、モデルに適した分布が設定でき、その状況に合った検定手法が利用される。または母数によらない検定（ノンパラメトリック検定）を用いることがある。