APTの検証仮説

—対角化ゼロ・ファクター・モデルと検証可能性—

村松郁夫

I はじめに

危険資産の価格決定モデルの一つである裁定評価理論（APT）は，資本資産評価モデル（CAPM）に対する代替モデルとして注目を浴びたという背景もあり，これまで，線形モデルとしての特徴が，主に，論じられてきた。APTの検証についても，Roll & Ross［14］以降，線形式の係数（ファクター・リスク・プレミアム）がゼロと異なっているか否かを検定することによって，ファクターの存在を確認するといったタイプの実証研究（以下，Roll & Rossタイプの検証と呼ぶ）を巡って，賛否相見え，種々の成果が蓄積されてきた。

本稿の目的は，まず第一に，Roll & Rossタイプの検証における上述の検証仮説が，APTの理論的含意を正確に反映したものではないことを確認することである。付随的に，APTにおける無裁定機会の定義を整理することも，その目的に含めておきたい。

APTが成立するためには，無裁定機会（裁定取引によって利益が生じる機会が存在しないこと）が，うまく定義できなければならない。無裁定機会が定義されると，APTは，資産の収益生成プロセスとしてのファクター・モデルから直接的に導出される。それゆえ，ファクター・リスク・プレミアムの符号や大きさを規定する条件ないし根拠は，APTの理論的含意においては，何ら存在しない。これが，Roll & Rossタイプの検証仮説は，APTの真の検証仮説となっていないことの論拠であるが，この第一点に関しては，APTの導出を通して容易に確認することができる。

APTにおける無裁定機会の定義は，そのベースとなるファクター・モデルの設定に応じて，それぞれ，想定される経済が異なる。具体的には，ファクター・モデルに固有項（idiosyncratic term）が含まれないケースと，固有項が含まれる，より一般的なケースである。固有項が含まれないケースでは，有限資産経済下で無裁定機会を定義することが可能であるが，固有項が含まれるケースにおいては，無限資産経済を想定することによって，はじめて，裁定機会を漸近的に定義することが可能となる。そもそも裁定機会とは，同質的財の価格差によって生じる利益の稼得機会を指すが，漸近的裁定機会においては，財の同質性の程度，つまり，誤差の程度が考慮されなければならない。APTの場合，実は，資産数が増加するにつれて，APTの線形式における誤差項の二乗和が無限に大きくなるのか，あるいは，有限な値にとどまるのかが問題となる。そして，後者，つまり，誤差項の二乗和が発散しないことが，APTが成立するための必要十分条件となる。

ところで，APT，および，その根底にあるファクター・モデルの特徴として，「因子軸の回転」が制限されないことがあげられる。因子軸の回転は，APTにおけるファクター・リス

（本稿は，1997年度，日本経営財務研究学会第21回全国大会（名古屋学院大学）における報告に，加筆修正を加えたものである。有益なコメントをいただいた，飯野正幸先生（東北大学）に，記して感謝の意を表します。なお，当然ながら，あり得べき誤謬は，筆者の責に帰するものである。

ク・プレミアムの大きさ自体は重要な指標ではなく，反応係数行列（因子負荷行列）との相対的な関係のみが分析対象となることを表しているに過ぎない。これは，APT を線形式として表現する際の注意すべき一つの視点を与えているが，そもそも，ファクター数，ひいては，反応係数行列が既知ではないファクター・モデルにおいて，ファクター・モデルの条件を満たすファクター構造を一意に決定することができるのかという問題を提起したのが，Shanken [15] のゼロ・ファクター・モデルである。

因子分析を用いて資産の分散共分散行列を分解しファクターを抽出するという Roll & Ross の手法に対して，Shanken は，分散共分散行列の対角化を考えることにより，ファクター・モデルの既存の条件を満たしつつ，因子数を任意に設定したモデルを形成することができることを示した。このような変換モデルが存在する場合には，変換モデルの下で APT の命題が定義可能であれば，変換モデルに対応した APT を導出することができる。

本稿の第二の目的は，APT の命題，つまり，無裁定機会を，対角化モデルの下で定義することである。ただし，行列を対角化する手法にはさまざまな手法が存在するので，Shanken の対角化モデルは，その一例にすぎない。そこで，本稿では，固有ベクトル変換による分散共分散行列の対角化を考え，ゼロ・ファクター・APT を提示する。そして，このモデルの下で，APT の命題が変換前の APT の命題と同値であることを示し，ファクター構造に依存しない無裁定機会の定義可能性を考察する。

議論の順序として，まず，第Ⅱ節では，APT の検証モデルについて簡単に振り返り，Roll & Ross タイプの検証仮説の再検討を通して，APT の真の検証仮説を確認する。なお，議論をより単純化するため，まず，ファクター・モデルに固有項が含まれないケースを扱ったのち，固有項が含まれるケースを扱う。ファクター・モデルのこのような設定に基づき，第Ⅲ節では，APT における無裁定機会の定義を整理するとともに，Ingersoll [10] を手がかりに，第Ⅱ節で導かれた APT の命題について，線形式によらない検証の可能性について探る。なお，本節は，次節以降で提示する，資産の分散共分散行列の対角化によるゼロ・ファクター・モデルに対する準備的考察である。

以降の節では，資産の収益の分散共分散行列を対角行列に変換することによって構築される，ゼロ・ファクター・モデルに言及する。まず，第Ⅳ節では，固有ベクトル変換による対角化モデルを提示し，変換モデルにおけるゼロ・ファクター・APT の命題について，オリジナルな APT の命題との整合性について検討する。第Ⅴ節では，Shanken [15] の逆行列による対角化モデルを取り上げ，その命題について考察する。そして，第Ⅵ節では，APT の検証可能性をめぐる Shanken [15, 16] と Dybvig & Ross [7] の論争について整理すると共に，対角化ゼロ・ファクター・モデルの検証上の有効性について考察する。

Ⅱ　APT の線形式と検証仮説

1.　Roll & Ross タイプの検証仮説

ファクター・モデルは，資産の収益をその期待収益，ファクターに関わる収益，および，資産に固有な収益の3つの部分から捉えようとする線形モデルであり，通常，以下のように表される。

$$r_i = \mu_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} f_k + u_i \qquad (2\text{-}1)$$

ここで，r は資産の単位あたり収益，μ は期待収益，f はファクター，b はファクターに対する反応係数，u は固有項を表す[1)]。資産の収益が

1)　固有項とファクターについては，期待値 $E(u_i)=0$，分散 $E(u_i^2)=\sigma^2<\infty$，共分散 $E(u_i, u_j)=0, (i \neq j)$，$E(f_i)=0$，$E(f_i^2)=1$，$E(f_i, f_j)=0, (i \neq j)$，$E(f_j, u_i)=0$ と仮定する。

ファクター・モデルに基づいて発生する仮定すれば，裁定機会が存在しないという条件の下で，APT は，

$$\mu_i \approx r_f + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \cdots + \lambda_K b_{iK} \qquad (2\text{-}2)$$

のように近似式として表すことができる。ただし，r_f は無危険資産の収益，λ はファクター・リスク・プレミアムと呼ばれる係数である。

ファクターによるリスク評価が有効であるならば，ファクターには，リスクの対価としてプレミアムがついているはずである。そして，各資産が稼得するプレミアムは，ファクターに対するそれぞれの反応係数に依存する。APT の線形式については，このような解釈が成り立つ。そこで，Roll & Ross タイプの検証では，上式を完全に成立するものとみなし，ファクター・リスク・プレミアムの有意性検定に際して，帰無仮説を

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_K = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

とする。

2.　1ファクター・APT（固有項がないケース）

1ファクター・モデルに固有項が含まれない単純化されたモデルの下で APT を導出し，APT の検証仮説について確認する。

この場合，1ファクター・モデルは，(2-1) 式より，

$$r_i = \mu_i + b_i f \qquad (2\text{-}1a)$$

と表される。まず，2資産ポートフォリオ P を形成する。資産 i への投資額を x，資産 j への投資額を $1-x$，つまり，総投資額（コスト）は1とすると，ポートフォリオ P の収益は，

$$\begin{aligned} r_p &= x r_i + (1-x) r_j \\ &= [x(\mu_i - \mu_j) + \mu_j] + [x(b_i - b_j) + b_j] f \end{aligned} \qquad (2\text{-}5)$$

となる。

次に，無リスク・ポートフォリオ，つまり，ポートフォリオの反応係数，

$$x(b_i - b_j) + b_j = 0$$

であるポートフォリオを選択し，そのときの，資産 i への投資額を x^* で表すと，

$$x^* = \frac{b_j}{b_j - b_i} \qquad (2\text{-}6)$$

となる。コストが1である無リスク・ポートフォリオの収益は，裁定機会が存在しない場合，無危険資産の収益に等しいはずであるから，

$$r_P = \frac{b_j(\mu_i - \mu_j)}{b_j - b_i} + \mu_j = \frac{b_j \mu_i - b_i \mu_j}{b_j - b_i} = r_f \qquad (2\text{-}7)$$

でなければならない。そこで，

$$\frac{\mu_i - r_f}{b_i} = \frac{\mu_j - r_f}{b_j} \equiv \lambda$$

とおき，線形式として表すと，

$$\mu_i = r_f + \lambda b_i \qquad (2\text{-}8)$$

を得る。

以上，明らかなように，$b_i \neq b_j$ となる2つの資産が存在すれば，無リスク・ポートフォリオを形成することができる。また，無リスク・ポートフォリオの収益が，たとえば，r_f のような正の値として一つだけ存在していれば，つまり，コストが1，リスクが0のポートフォリオの収益が正の値 r_f であれば，裁定機会は存在しない。このように，APT は，リスクの異なる2資産について，

$$\frac{\mu_i - r_f}{b_i} = \frac{\mu_j - r_f}{b_j} \qquad (2\text{-}8')$$

であるという関係を表現しているに過ぎず，Roll & Ross タイプの検証式における帰無仮説，$\lambda = 0$ が棄却されなければならない必然性はない。$\lambda = 0$ の場合，すべての危険資産の収益が，無危険資産の収益 r_f に等しくなるという，あまり意味のない世界になってしまうが，少なくとも，$\lambda = 0$ であっても，APT の成立が妨げられることはない。

3. Kファクター・APT（固有項がないケース）

マルチ・ファクターのケースでも，1ファクターの場合と同様，互いにリスクの異なる資産がファクター数よりも一つ多く存在するとき，無裁定機会を定義することができる。本ケースでは，(2-1) 式のKファクター・モデルは，

$$r_i = \mu_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} f_k \tag{2-1b}$$

と表されるので，1ファクターのケースと同様，コストが1に等しい$K+1$資産・無リスク・ポートフォリオを形成する。このようなポートフォリオにおいては，

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{K+1} x_i = 1, \\ &\sum_{i=1}^{K+1} x_i b_{i1} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{K+1} x_i b_{i2} = 0, \\ &\qquad \vdots \\ &\sum_{i=1}^{K+1} x_i b_{iK} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

が成立している。無裁定機会を想定し，$K+1$資産・無リスク・ポートフォリオの収益をr_fとおくと，

$$\sum_{i=1}^{K+1} x_i(\mu_i - r_f) = 0 \tag{2-10}$$

が成立するから，行列表記を用いると，

$$\begin{bmatrix} \mu_1 - r_f & \mu_2 - r_f & & \mu_{K+1} - r_f \\ b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{K+11} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{1K} & b_{2K} & \cdots & b_{K+1K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

と表される。この同時方程式が自明でない解を持つためには，左辺の行列の位，rank $< K+1$でなければならない。そのとき，$K+1$個のベクトルは一次従属であり[2]，APT は，

$$\mu_i = r_f + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \ \cdots \ + \lambda_K b_{iK} \tag{2-8a}$$

と表される。ここで，線形式の係数に関する (2-3) 式の仮説，$\lambda_1 = \lambda_2 = \ \cdots\ \lambda_K = 0$ であっても，APT は成立する。なぜならば，$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ \cdots \ \neq \lambda_K \neq 0$ であることは，一次従属の必要条件ではないからである[3]。

以上，固有項がない世界では，ファクター数よりも一つ多くリスクの異なる資産が存在し，コスト1の無リスク・ポートフォリオの収益が一つの正の値であれば，裁定機会は存在せず，APT が成立することがいえる。

4. Kファクター・APT（固有項があるケース）

次に，ファクター・モデルに固有項が含まれる，より一般的なケースについて，APT を導出するとともに，その検証仮説を確認する。ファクター・モデルに固有項が含まれる場合，固有項が含まれないケースとは異なり，ある資産と代替的な有限資産ポートフォリオを形成することができないため，有限資産経済下では，そもそも裁定機会を定義できない。以下に見るように，無限資産経済を想定することによって，はじめて，漸近的裁定機会が定義可能である。

行列表記を用いて，(2-1) 式のKファクター・モデルを

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u} \tag{2-1c}$$

と表す。$\boldsymbol{1}$と$\boldsymbol{B}$が張る線形空間上への$\boldsymbol{\mu}$の射

---

2) 上記行列の行に注目すると，固有項が含まれないケースにおいては，ある資産の反応係数は，有限資産ポートフォリオによって複製可能であることが分かる。一般に，固有項が含まれないケースにおいては，分散共分散行列が特異行列となるから（脚注7参照），このような状況が成立する。

3) $\lambda_0(\boldsymbol{\mu} - r_f\boldsymbol{1}) + \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \ \cdots \ + \lambda_K \boldsymbol{b}_K = \boldsymbol{0}$ において，例えば，$\lambda_0 \neq 0$ であれば，一次従属である。

影，

$$\boldsymbol{\mu} = \lambda_0 \boldsymbol{1} + \boldsymbol{B\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2-12}$$

を考えると，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は $\boldsymbol{1}$ と $\boldsymbol{B}$ と直交するので，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{1} &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2-13}$$

が成立している。そこで，$\alpha\boldsymbol{\varepsilon}$ を投資比率ベクトルとして，総投資額がゼロとなるポートフォリオを形成する。

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{r} &= \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\mu} + \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{Bf} + \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{u} \\ &= \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'(\lambda_0\boldsymbol{1} + \boldsymbol{B\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{u} \\ &= \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} + \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{2-14}$$

このポートフォリオは，ファクター・リスクがゼロに等しい（以下では，便宜的に，ゼロ・ベータと呼ぶ）ポートフォリオとなっているが，その収益の期待値と分散は，

$$\begin{aligned} \mu_p &= \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \\ V_p &= \alpha^2\sigma^2\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \tag{2-15}$$

と求められる。

ここで，漸近的裁定機会を考える。無限資産経済，つまり，ポートフォリオを構成する資産数 $n \to \infty$ のとき，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \to \infty$ であるならば，α を適当に選択することにより[4)]，リスク $V_p \to 0$，期待収益 $\mu_p \to \infty$ となる裁定機会が存在することになる[5)]。したがって，裁定機会が存在しないという条件の下では，APT の命題は，

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty \tag{2-16}$$

となる。

APT の検証仮説について補足すると，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\mu} + \lambda_0\boldsymbol{1} - \boldsymbol{B\lambda}$$

であったから，無危険資産が存在する場合，APT の命題は，

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\mu} - r_f\boldsymbol{1} - \boldsymbol{B\lambda})^2 < \infty \tag{2-16$'$}$$

と表される。すると，APT が成立する世界においては，多くの資産について，右辺括弧内の値は十分に小さいと考えることができるので，近似的に，

$$\boldsymbol{\mu} \approx r_f\boldsymbol{1} + \boldsymbol{B\lambda} \tag{2-2$'$}$$

と表現されてきたのである。しかし，この近似式を完全線形式と見なしたとしても，APT の命題から明らかなように，$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$ であるか否かに関らず，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ であれば，漸近的裁定機会は存在しない[6)]。それゆえ，Roll & Ross タイプの検証仮説は，APT の命題を正確に反映したものとはなっていないのである。検証を目的とする場合，誤差項の二乗和が発散しないという APT の命題を線形式に盛り込むためには，

$$\boldsymbol{\mu} = r_f + \boldsymbol{B\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2-17}$$

と表現するのが適当であろう。

---

4)　$\alpha = (\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})^{-p}$, $\left(\frac{1}{2} < p < 1\right)$ とおく。

5)　裁定機会は，資産数 $n \to \infty$ のとき，コスト $\to 0$，リスク $\to 0$，$\mu > 0$ と定義される。そこで，裁定ポートフォリオにおいて，$\alpha = \frac{1}{n}$，$\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}}$，などと適当に定めれば，$V \to 0$, $\mu \to 0$ となる無裁定機会がうまく定義され，APT の命題を代替的に表現することもできる。例えば，Ingersoll [11]。

6)　ファクター・モデルに固有項が含まれないケースについては，裁定ポートフォリオの収益は，

$$\alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{r} = \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

となるから，分散 $V_P = 0$ である。したがって，無裁定機会は，期待収益 $\mu_P = \alpha\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \equiv 0$，つまり，$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$ と定義される。その結果，APT は，完全線形式として，

$$\boldsymbol{\mu} = \lambda_0\boldsymbol{1} + \boldsymbol{B\lambda}$$

と表される。しかし，すでに見とおり，固有項が含まれないケースにおいても，$\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0}$ は，APT の真の検証仮説とはなっていない。

Ⅲ　ファクター構造と検証仮説

1.　ファクター・モデルと分散共分散行列

前節の議論より，検証されるべき真の仮説は，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ であることが明らかとなった。資産数の増加に伴う $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$ の動きについて，さらなる考察を加えるためには，資産収益の分散共分散行列，特に，固有項の分散共分散行列の構造について，理解を深めておくことが有効である。

そこで，まず，ファクター・モデルにおける資産収益の分散共分散行列 $\boldsymbol{V}$ を示す。ただし，固有項の分散共分散行列 $\boldsymbol{D}$ について，

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1^1 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{3-1}$$

と仮定する。K ファクター・モデルを想定する場合，

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{BB}' + \boldsymbol{D} \tag{3-2}$$

が分散共分散行列である。[7]

$\boldsymbol{V}$ に関して，より重要な役割を担うのは $\boldsymbol{D}$ であるが，先に，$\boldsymbol{BB}'$ について若干触れておく。$\boldsymbol{Z}$ を任意の K 次直交行列とし，$\boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{f}$ によって因子の直交変換（回転）を考える。因子負荷行列（反応係数行列）について，$\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{BZ}$ という変換を定義すると，

$$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{Bf}$$

$$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}^{*\prime} = \boldsymbol{BB}'$$

が成立するので，因子の直交変換は，分散共分散行列 $\boldsymbol{V}$ の構造を不変に保つ。この特徴は，「回転に関する不定性」として知られているが，ファクター，および，反応係数行列が先験的に与えられる場合を除いて，反応係数行列は，リスクに関して相対的な情報しかもたらさないことを意味している。

次に，$\boldsymbol{D}$ について検討する。見通しをよくするために，あらかじめ，ポートフォリオの収益の分散 V_p を求める。投資比率ベクトルを $\boldsymbol{x}$ で表せば，

$$V_p = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} \tag{3-3}$$

と計算されるが，裁定ポートフォリオのようなゼロ・ベータ・ポートフォリオについては，$\boldsymbol{BB}'$ に関する項が消えて，

$$V_p = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \tag{3-3$'$}$$

となる。

いま，$\boldsymbol{D}$ の対角成分が，ある正の値によっておさえられないような状況を想定する。つまり，

$$\sigma_i^2 \leq d < \infty$$

が成立しないような場合である。そのとき，ある資産について，収益の分散は無限大であり，そのような資産を含むポートフォリオについても同じ状況が生じるため，無裁定機会を定義するに当たって不都合が生じてしまう。逆に，任意の資産について，

$$\sigma_i^2 = 0$$

であるような状況を想定する。この場合，$\boldsymbol{D}$ は非負定符号行列となるので，$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \geq 0$，つまり，有限資産経済下での無裁定機会に等しい状況が生じ得る。[8]

そこで，漸近的裁定機会を取り扱う世界では，$\boldsymbol{D}$ について，

$$0 < \underline{d} \leq \sigma_i^2 \leq d < \infty \tag{3-4}$$

との仮定を置くことが有効である。このような

7）固有項が含まれないケースにおいては，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{BB}'$ となるが，rank $(\boldsymbol{BB}') \leq K$ であるから，$\boldsymbol{V}$ は特異行列である。

8）$\boldsymbol{D}$ は対角行列であったから，$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = 0$ のとき，固有項の分散がゼロである資産にのみ投資することを意味する。ただし，前節の議論からも明らかなように，無裁定機会を定義するためには，想定されるファクター数を上回る，このタイプの資産が必要となる。

仮定の下では，対角行列 $\boldsymbol{D}$ は正定符号であり，正則である。言い方を変えれば，$\boldsymbol{D}$ について上記の仮定が置かれると，無裁定機会を定義するためには，漸近的な世界を想定する必要が生じるのである。

2.　固有項の分散共分散行列 $\boldsymbol{D}$ と誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$

固有項の分散共分散行列 $\boldsymbol{D}$ が，上記のように規定された場合，漸近的にみて，誤差の二乗和 $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$ は，どのように捉えられるのであろうか。ここでは，Ingersoll [10] を手がかりに，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$ の評価を通して，ゼロ・ファクター・APT における検証仮説を検討する。

まず，Ingersoll の APT 命題を簡単に紹介する。正定符号行列に $\boldsymbol{D}$ 対して，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ となる正則行列 $\boldsymbol{A}$ が存在するので，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ を $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{1}$ と $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ の張る線形空間に射影すると，

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mu}=\lambda_0\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\nu} \tag{3-5}$$

を得る。誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ については，

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\mu}-\lambda_0\boldsymbol{1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nu} \tag{3-6}$$

である。また，$\boldsymbol{\nu}$ は，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ と，それぞれ直交するので，(3-6) 式より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{1}&=\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{A}'^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{1}=\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{1}=0\\ \boldsymbol{\nu}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{A}'^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{3-7}$$

が成立している。

そこで，$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}$ を投資比率ベクトルとし，(3-7) 式を満たすゼロ・ベータ・裁定ポートフォリオを形成すると，ポートフォリオの期待収益と収益の分散は，

$$\begin{aligned}\mu_p&=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\mu}\\ &=(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\mu}\\ &=(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}(\lambda_0\boldsymbol{1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\nu})\\ &=1\\ V_p&=(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})^{-2}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{D})\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\\ &=(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}\end{aligned} \tag{3-8}$$

と求められる。すると，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\to\infty$ であれば，$V_p\to 0,\ \mu_p=1$ となる裁定機会が生じる。したがって，τ を正値として，APT の命題は，

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\leq\tau<\infty \tag{3-9}$$

と表される。

次に，APT の命題について，前述の (2-16) 式と (3-9) 式を比較する。一般に，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ については，

$$\|\boldsymbol{D}^{-1}\|^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\leq\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\leq\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{D}\| \tag{3-10}$$

なる関係が成立する[9]。$\boldsymbol{D}$ は対角行列であったから，その対角成分は固有値である。また，(3-4) 式の $\boldsymbol{D}$ に関する仮定により，$0<\|\boldsymbol{D}^{-1}\|^{-1},\|D\|<\infty$ が成立する。それゆえ，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}<\infty$ と $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}<\infty$ は，同値であることがいえる。

3.　ゼロ・ファクター・APT における検証仮説

さらに，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ について分析するために，分散共分散行列 $\boldsymbol{V}$ の逆行列を求める。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^{-1}&=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{D})^{-1}\\ &=\boldsymbol{D}^{-1}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}^{-1}\end{aligned} \tag{3-11}$$

ただし，K 次行列，$\boldsymbol{\Lambda}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}$ である。いま，$\boldsymbol{\varepsilon}_0=\boldsymbol{\mu}-r_f\boldsymbol{1}$ とおく。$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\mu}-r_f\boldsymbol{1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda}$ であったから，$\boldsymbol{\varepsilon}_0=\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda}$ である。

平均－標準偏差平面におけるシャープの尺度 (Sharpe measure) の二乗は，

$$\theta^2\equiv(\boldsymbol{\mu}-r_f\boldsymbol{1})'\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r_f\boldsymbol{1}) \tag{3-12}$$

と表されるので，(3-11) 式と $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ で置き換えて整理すると，

---

9)　正定符号行列 $\boldsymbol{A}$ について，

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1}\leq\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{A}\|$$

が成立する。なお，$\|\boldsymbol{A}\|$ は $\boldsymbol{A}$ の最大固有値である。

$$(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{B\lambda})'(\boldsymbol{D}^{-1}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B\Lambda B'D}^{-1})(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{B\lambda})$$
$$=\boldsymbol{\varepsilon' D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}+2\boldsymbol{\lambda' B' D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\lambda' B' D}^{-1}\boldsymbol{B\lambda}$$
$$-(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{B\lambda})'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B\Lambda B' D}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{B\lambda}) \tag{3-13}$$

となる。(3-13) 式の右辺第2項については，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ の直交性により，ゼロと見なすことができる。第3項については，$b_{ij}<\infty$ であるという一般的な仮定の下では，

$$\boldsymbol{\lambda' B' D}^{-1}\boldsymbol{B\lambda} \leq \boldsymbol{\lambda' B' B\lambda}\|\boldsymbol{D}^{-1}\| < \infty$$

が成立する。以下，第4項についても，同様に議論を進めることができるので，結局，第1項，$\boldsymbol{\varepsilon' D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}<\infty$ であるならば，$\theta^2<\infty$ であることがいえる。[10)]

$\boldsymbol{\varepsilon'\varepsilon}<\infty$, $\boldsymbol{\varepsilon' D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}<\infty$，そして，$\theta^2<\infty$ の同値性に着目すると，APTの検証という観点からは，ゼロ・ファクター・モデルは，扱い易モデルであることが予想される。そこで，次節以降，二つの変換モデルによってゼロ・ファクター・APT を形成し，その検証可能性について考察する。

Ⅳ　固有ベクトル変換による対角化モデル

1.　分散共分散行列の固有値と固有ベクトル

以下では，議論の単純化のため，1ファクター・モデルを想定し，すべての資産について，固有項の分散 $E(u_i^2)=\sigma^2$,（ σ^2 は定数）と仮定する。ファクター・モデル (2-1) 式を上記の仮定にあわせて，

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{bf}+\boldsymbol{u} \tag{2-1d}$$

と表すと，分散共分散行列は，

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{bb}'+\sigma^2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} b_1^2+\sigma^2 & & & b_1b_n \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ b_nb_1 & & & b_n^2+\sigma^2 \end{bmatrix} \tag{4-1}$$

と計算される。

まず，対称行列 $\boldsymbol{V}$ の固有値と固有ベクトルを示す。g_1 を第1固有値，$\boldsymbol{t}_1$ を g_1 に対応する固有ベクトルとすると，

$$\boldsymbol{t}_1=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{b'b}}}\boldsymbol{b} \tag{4-2}$$

$$g_1=\boldsymbol{b'b}+\sigma^2 \tag{4-3}$$

である。また，他の固有値については，$g_i=\sigma^2$,（$i=2,\cdots,n$）となっている。

2.　変換モデルにおけるゼロ・ファクターAPT

上で求めた分散共分散行列の固有ベクトルを要素とする行列 $\boldsymbol{T}$ に対して，以下に示す対角行列 $\boldsymbol{C}$ を作成する。

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{b'b}}}{\boldsymbol{1'b}} & & & 0 \\ & \dfrac{1}{\boldsymbol{1'}\boldsymbol{t}_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \dfrac{1}{\boldsymbol{1'}\boldsymbol{t}_n} \end{bmatrix} \tag{4-4}$$

$$\boldsymbol{T}'=\begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{b}'}{\sqrt{\boldsymbol{b'b}}} \\ \boldsymbol{t}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{t}_n' \end{bmatrix}$$

ただし，$\boldsymbol{t}_i'\boldsymbol{t}_i=1$, $\boldsymbol{t}_i'\boldsymbol{t}_j=0$, $\boldsymbol{t}_i'\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{1'b}\neq 0$, $\boldsymbol{1'}\boldsymbol{t}_i\neq 0$ と仮定する。この二つの行列の積については，

$$(\boldsymbol{CT}')\boldsymbol{1}=\boldsymbol{1}$$

が成立しているから，$\boldsymbol{CT}'$ の各行を投資比率べ

10)　実は，$\boldsymbol{\varepsilon' D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ は，ゼロ・ファクター・モデルにおけるシャープの尺度の二乗となっている。なお，シャープの尺度と資産評価理論の検証を巡る議論は，堀本 [4] に詳しい。

クトルとみなせば，コストが1である N 個のポートフォリオを形成することができる。

原資産の収益 $\boldsymbol{r}$ に対して，

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{CT'r} \tag{4-5}$$

によって，N 個のポートフォリオの収益 $\boldsymbol{r}^*$ に変換する。$\boldsymbol{r}^*$ の期待収益 $\boldsymbol{\mu}^*$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{V}^*$ を求めると，

$$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{CT'E} \tag{4-6}$$

$$\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{CT'VTC'}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\boldsymbol{b'b}}{\boldsymbol{1'b}}\right)^2\left(1+\dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{b'b}}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma^2}{(\boldsymbol{1't_2})^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\sigma^2}{(\boldsymbol{1't_n})^2} \end{bmatrix} \tag{4-7}$$

となるので，固有ベクトル変換による対角化モデルにおいては，N 個の変換されたポートフォリオの分散共分散行列 $\boldsymbol{V}^*$ が対角行列となるような，ゼロ・ファクター・モデルを形成することができる[11]。

ところで，$\boldsymbol{V}^*$ は対角行列であったから，その対角成分は固有値である。それゆえ，$\dfrac{\boldsymbol{b'b}}{\boldsymbol{1'b}} \to \infty$ となる場合，$\boldsymbol{V}^*$ の第一固有値は発散する[12]。そこで，$\dfrac{\boldsymbol{b'b}}{\boldsymbol{1'b}} < \infty$ と仮定すると，変換モデルにおけるゼロ・ファクター・APTとして，

$$\boldsymbol{\mu}^* = r_f\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{4-8}$$

を得る。

11）ポートフォリオの反応係数ベクトル $\boldsymbol{b}^*$ は，

$$\boldsymbol{b}^{*\prime} = (\boldsymbol{CT'b})' = \left[\frac{\boldsymbol{b'b}}{\boldsymbol{1'b}}\ 0\ \cdots\ 0\right]$$

となっているので，厳密には，すべてのポートフォリオについて反応係数がゼロであるというわけではない。

12）Chamberlain & Rothschild [6] 流にいえば，ファクターが存在するケースに相当する。

3. 変換モデルにおける APT の検証命題

原資産ベースで定義された，誤差項の二乗和に関する APT の命題が，変換モデルにおけるゼロ・ファクター・APT についても当てはまることを示す。つまり，

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^* < \infty$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \to \infty \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^* \to \infty$$

が成立することを示す。

原資産ベースの APT は，(2-17) 式より，

$$\boldsymbol{\mu} = r_f\boldsymbol{1} + \lambda\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

と表されたから，左から $\boldsymbol{CT'}$ を掛けて $\boldsymbol{\mu}^*$ を求めると，

$$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{CT'\mu}$$
$$= r_f\boldsymbol{1} + \lambda\boldsymbol{CT'b} + \boldsymbol{CT'\varepsilon}$$

を得る。そこで，変換モデルにおけるゼロ・ファクター・APT，(4-8) 式との差分をとると，

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \lambda\boldsymbol{CT'b} + \boldsymbol{CT'\varepsilon}$$

したがって，

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^* = \lambda^2\boldsymbol{b'TC^2T'b} + 2\lambda\boldsymbol{b'TC^2T'\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon'TC^2T'\varepsilon} \tag{4-9}$$

となる。ここで，$\boldsymbol{TC^2T'}$ については，

$$\boldsymbol{TC^2T'} = \frac{\boldsymbol{bb'}}{(\boldsymbol{1'b})^2} + \frac{\boldsymbol{t_1t_2'}}{(\boldsymbol{1't_2})^2} + \cdots + \frac{\boldsymbol{t_nt_n'}}{(\boldsymbol{1't_n})^2} \tag{4-10}$$

と計算されるが，$\boldsymbol{t_i't_i} = 1$，$\boldsymbol{t_i't_j} = 0$，$\boldsymbol{t_i'b} = 0$，$\dfrac{\boldsymbol{b'b}}{\boldsymbol{1'b}} < \infty$ と仮定されていたから，(4-10) 式を適用すると，(4-9) 式の右辺第1項については，

$$\lambda^2\boldsymbol{b'TC^2T'b} = \lambda^2\frac{(\boldsymbol{b'b})^2}{(\boldsymbol{1'b})^2} < \infty \tag{4-11}$$

第2項については，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ の直交性により，

$$2\lambda\boldsymbol{b'TC^2T'\varepsilon} = 2\lambda\frac{(\boldsymbol{b'b})^2}{(\boldsymbol{1'b})^2}\frac{(\boldsymbol{b'\varepsilon})}{(\boldsymbol{b'b})} \to 0 \tag{4-12}$$

が成り立つ。

第3項については，

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{T}'\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varepsilon})^2}{(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{b})^1} + \frac{(\boldsymbol{t}_2'\boldsymbol{\varepsilon})^2}{(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{t}_2)^2} + \cdots + \frac{(\boldsymbol{t}_n'\boldsymbol{\varepsilon})^2}{(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{t}_n)^2} \tag{4-13}$$

と表しておく。ところで，n 個の固有ベクトルは，n 次元の正規直交基底の一つである。そこで，n 次元ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ を固有ベクトル $\boldsymbol{t}_j$ の一次結合で表現すると，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{t}_j$$

ただし，$a_j = (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{t}_j)$ である。(4-13) 式に代入すると，第3項は，

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{T}'\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{t}_j)^2}$$

と表される。$n \to \infty$ のとき，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ であれば，

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty$$

となるので，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{T}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ が成立する。逆に，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \to \infty$ のときには，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{T}'\boldsymbol{\varepsilon} \to \infty$ となる。

V　Shanken の対角化モデル

1.　変換モデルと分散共分散行列 V^*

Shanken [15] の対角化モデルがどのようなものであったのか確認し，固有値ベクトルによる対角化モデルと対比する。なお，分散共分散行列については，固有値ベクトルによる対角化モデルと同様に，

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}' + \sigma^2 \boldsymbol{I} \tag{4-1}$$

とする。$\boldsymbol{V}$ は正定符号行列であり，逆行列 $\boldsymbol{V}^{-1}$ が存在すると仮定すると，$\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}$ となる正則行列 $\boldsymbol{Q}$ が存在し，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^{-1} &= \sigma^{-2}\boldsymbol{I} - \frac{\sigma^{-2}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'\sigma^{-2}}{1+\sigma^{-2}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}} \\ &= \sigma^{-2}\boldsymbol{I} - \frac{\sigma^{-2}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'}{\sigma^2+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}} \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\left[\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'}{\sigma^2+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}}\right] \equiv \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}\end{aligned} \tag{5-1}$$

と表される[13]。ここで，

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\sigma}(\boldsymbol{I} - h\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}') \tag{5-2}$$

$$k = h\boldsymbol{1}'\boldsymbol{b} \tag{5-3}$$

とおくと，

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{1} = \frac{1}{\sigma}\{\boldsymbol{1} - h(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}\} = \frac{1}{\sigma}(\boldsymbol{1} - k\boldsymbol{b}) \tag{5-4}$$

を得る[14]。すると，このような $\boldsymbol{Q}$ に対して，

$$U = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma}{1-kb_1} & & & 0 \\ & \dfrac{\sigma}{1-kb_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \dfrac{\sigma}{1-kb_n} \end{bmatrix} \tag{5-5}$$

を形成することにより，$\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}$，つまり，$\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}$ の行ベクトルを投資比率ベクトルとする，

---

13)　正則行列 $\boldsymbol{A}$ と二つのベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\nu}$ について，

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{u}\boldsymbol{\nu}')^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \frac{(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\nu}'\boldsymbol{A}^{-1})}{1+\boldsymbol{\nu}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}}$$

が成立する。Rao [12]，邦訳31ページ。

14)　h については，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q} &= \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{I}-h\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}')'(\boldsymbol{I}-h\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}') \\ &= \frac{1}{\sigma^2}[\boldsymbol{I}-2h\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'+h^2\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}'] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}[\boldsymbol{I}-(2h-\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}h^2)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}']\end{aligned}$$

であるから，

$$2h - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}h^2 = \frac{1}{\sigma^2+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}}$$

と表される。この2次方程式を解けば，

$$\begin{aligned}h &= \frac{1}{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{(\sigma^2+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b})^2}} \\ &= \left[1 \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}}}\right]\frac{1}{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}}\end{aligned}$$

を得る。また，$k = h\boldsymbol{1}'\boldsymbol{b}$ とおけば，

$$k = \left[1 \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}}}\right]\frac{\boldsymbol{1}'\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}}$$

となる。

変換されたポートフォリオモデルを形成することができる。

それでは，$\boldsymbol{UQ}$ によって変換される，ポートフォリオモデルの分散共分散行列 $\boldsymbol{V}^*$ は，どのように表されるのであろうか。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^* &= \boldsymbol{UQV}(\boldsymbol{UQ})' \\ &= \boldsymbol{UQVQ'U'} \\ &= \boldsymbol{U}^2\end{aligned}$$

と計算されるから，

$$\boldsymbol{V}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma^2}{(1-kb_1)^2} & & & 0 \\ & \dfrac{\sigma^2}{(1-kb_2)^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \dfrac{\sigma^2}{(1-kb_n)^2} \end{bmatrix} \tag{5-6}$$

と表され，変換モデルにおけるポートフォリオの分散共分散行列は，対角行列となる。

2. 変換モデルにおける APT の検証命題

固有ベクトルによる対角化モデルの場合と同様に，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty \quad &\longrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^* < \infty \\ \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \to \infty \quad &\longrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^* \to \infty\end{aligned}$$

が成立することを示す。原資産ベースの APT，(2-17) 式，

$$\boldsymbol{\mu} = r_f\boldsymbol{1} + \lambda\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

に，左からを $\boldsymbol{UQ}$ 掛けて期待収益を変換すると，

$$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{UQ\mu} = r_f\boldsymbol{1} + \lambda\boldsymbol{UQb} + \boldsymbol{UQ\varepsilon}$$

となる。一方，変換モデルにおけるゼロ・ファクター・APT は，(4-8) 式と同様に，

$$\boldsymbol{\mu}^* = r_f\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

と表される。ただし，逆行列による変換モデルにおいて，ゼロ・ファクター・APT を定義することができるように，$\|\boldsymbol{U}\| < \infty$，$\|\boldsymbol{V}^*\| < \infty$ を仮定する。両式の差分をとると，

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\lambda UQb} + \boldsymbol{UQ\varepsilon}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^* &= \lambda^2\boldsymbol{b'Q'U^2Qb} + 2\lambda\boldsymbol{b'Q'U^2Q\varepsilon} \\ &\quad + \boldsymbol{\varepsilon'Q'U^2Q\varepsilon} \\ &= \lambda^2\boldsymbol{b'Q'V^*Qb} + 2\boldsymbol{b'Q'V^*Q\varepsilon} \\ &\quad + \boldsymbol{\varepsilon'Q'V^*Q\varepsilon}\end{aligned} \tag{5-7}$$

となる。(5-7) 式の右辺各項について見ると，

第１項：$\lambda^2\boldsymbol{b'Q'V^*Qb} \leq \lambda^2\boldsymbol{b'QQb}\|\boldsymbol{V}^*\| < \infty$

第２項：$2\lambda\boldsymbol{b'Q'V^*Q\varepsilon} \to 0$

第３項：$\boldsymbol{\varepsilon'Q'V^*Q\varepsilon} \leq \boldsymbol{\varepsilon'QQ\varepsilon}\|\boldsymbol{V}^*\|$

が成立するので，第３項について，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ であれば，$\boldsymbol{\varepsilon'Q'V^*Q\varepsilon} < \infty$，$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \to \infty$ であれば，$\boldsymbol{\varepsilon'Q'V^*Q\varepsilon} \to \infty$ となる。つまり，変換モデルにおけるゼロ・ファクター・APT についても，誤差項の二乗和によって，APT の命題を表現することができる。

Ⅵ　対角化モデルを巡る議論

1. Shanken と Dybvig & Ross の論争

第Ⅳ節，第Ⅴ節を通じて，二つのゼロ・ファクター・APT を紹介してきた。手順は異なるが，これらのモデルは，資産の収益の分散共分散行列を対角化することによって，ファクター構造を変換するモデルであった。ファクター構造に関しては，これまで様々な議論が展開されてきたが，以下では，Shanken のモデルを巡る論争について整理することを通して，対角化ゼロ・ファクター・モデルと矛盾するケースについて整理する。逆にいえば，このような矛盾するケースを分析，把握することによって，対角化ゼロ・ファクター・モデルが有効となるような条件を求めることができるであろう。

本稿で取り上げた対角化モデルについて，要約しておく。

・資産の収益の分散共分散行列 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{BB}' + \boldsymbol{D}$ は，ゼロ・ファクター・モデルの場合，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{D}$，つまり，対角行列である。

・$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{BB}' + \boldsymbol{D}$ に対して，$\boldsymbol{V}$ を対角化する変換行列 $\boldsymbol{P}$ が存在し，変換された分散共分散行列 $\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{PVP}'$ で求められる。

・$\boldsymbol{V}^*$ は対角行列であるから，ゼロ・ファクター・モデルのファクター構造を持つ。したがって，変換された対角化モデルの下で，ゼロ・ファクター・APT，$\boldsymbol{\mu}^* = r_f\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$ を導出することができる[15)]。

このような対角化モデルに対して，Dybvig & Ross [7] は，以下のように反駁する。対角化モデルにおける分散共分散行列

$$\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{PVP}' \tag{6-1}$$

については，コーシー・シュワルツの不等式により，

$$\|\boldsymbol{V}\| < \|\boldsymbol{P}^{-1}\|^2 \|\boldsymbol{V}^*\|$$

が成り立つ。したがって，$\|\boldsymbol{V}\| \to \infty$ のとき，少なくとも，

(i)　$\|\boldsymbol{V}^*\| \to \infty$

(ii)　$\|\boldsymbol{P}^{-1}\| \to \infty$

のいずれかのケースが成立している。

まず，$\|\boldsymbol{V}^*\| \to \infty$ のケースについて考える。この場合，対角化モデルにおける分散共分散行列 $\boldsymbol{V}^*$ の最大固有値が発散することになるので，Chamberlain & Rothschild 流にいえば，ファクターが存在することになる。つまり，対角化モデルが，ゼロ・ファクター・モデルの構造を備えていないという矛盾が生じるケースである。

一方，$\|\boldsymbol{P}^{-1}\| \to \infty$ のケースについては，対角化モデルの再変換，

$$\boldsymbol{\mu} = r_f\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{1} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{6-2}$$

の矛盾を指摘する。対角化モデルにおける APT の命題，$\boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^* < \infty$ が成立しているとしても，

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^*)'(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^*) \to \infty$$

となり，再変換によるゼロ・ファクター・APT は成立しない。また，再変換によるゼロ・ファクター・APT の誤差項の二乗和はおさえられないので，原資産ベースのオリジナルなモデルにおいて，ファクターが説明力を有している可能性を示唆するケースである。

2.　対角化モデルの形成可能性

最後に，Dybvig & Ross が提示した代替的な二つのケースのうち，$\|\boldsymbol{V}^*\|$ に関するケースについて検討する。本稿で取り上げた二つの対角化モデルの分散共分散行列は，すでに求められているので，実際に行列と照らし合わせれば，$\|\boldsymbol{V}^*\|$ に関する具体的な分析を行うことができるであろう[16)]。

ここで，分散共分散行列 $\boldsymbol{V}^*$ を再掲する。

・固有ベクトルによる対角化モデル

---

15) Shanken は，$\boldsymbol{P}$ の逆行列を用いて，対角化ゼロ・ファクター・APTを再変換し，還元されたゼロ・ファクター・APT，

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\mu}^* = r_f\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{1} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{6-2}$$
$$\therefore \boldsymbol{\mu} = r_f\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

を導出する。このような変換，再変換が可能であるかぎり，オリジナルなファクター構造と再変換後のファクター構造が一致している保証はない，というのが Shanken の主張である。

16) 実は，第Ⅳ節，第Ⅴ節においては，Dybvig & Ross のケース（ i ）に該当する可能性が，あらかじめ排除された。本文でも指摘したとおり，これに該当する場合，対角化ゼロ・ファクター・モデルを形成することができないからである。なお，この点に関して，さらなる検討を加え，対角化ゼロ・ファクター・モデルの有効性を探ることが，本小節の目的である。

$V^{*} =$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\boldsymbol{b'b}}{\boldsymbol{1'b}}\right)^2\left(1+\frac{\sigma^2}{\boldsymbol{b'b}}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{(\boldsymbol{1'}\boldsymbol{t}_2)^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\sigma^2}{(\boldsymbol{1'}\boldsymbol{t}_n)^2} \end{bmatrix} \tag{4-7}$$

・逆行列による対角化モデル（Shanken）

$$V^{*} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{(1-kb_1)^2} & & & 0 \\ & \frac{\sigma^2}{(1-kb_2)^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\sigma^2}{(1-kb_n)^2} \end{bmatrix} \tag{5-6}$$

なお，Shankenモデルにおいて，

$$k = \left[1 \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + \boldsymbol{b'b})}}\right]\frac{\boldsymbol{1'b}}{\boldsymbol{b'b}}$$

であった。

二つの V^{*} は，いずれも対角行列であるから，対角成分は固有値となっている。そこで，対角成分に含まれるスカラー値 $\frac{\boldsymbol{b'b}}{\boldsymbol{1'b}}$ に注目して，$\|V^{*}\|$ に関するケースを再分類する。

① $\frac{\boldsymbol{b'b}}{\boldsymbol{1'b}} < \infty$ のケース

　固有ベクトル・モデル　$\|V^{*}\| < \infty$

　Shankenモデル　$\|V^{*}\| \to \infty$

② $\frac{\boldsymbol{b'b}}{\boldsymbol{1'b}} \to \infty$ のケース

　固有ベクトル・モデル　$\|V^{*}\| \to \infty$

　Shankenモデル　$\|V^{*}\| < \infty$

この分類からも分かるように，対角化ゼロ・ファクター・モデルを構築できる，万能な変換 $\boldsymbol{P}$ が存在するというわけではない。しかし，それぞれのケースについて，$\|V^{*}\| < \infty$ となるような変換は存在している。行列を対角化する手法は，いく種類も存在するので，状況に応じて，$\|V^{*}\| < \infty$ となるような変換を選択すれば，対角化ゼロ・ファクター・モデルを構築できることが期待される。

また，$\|V^{*}\| < \infty$ となるような変換が存在すれば，$\|\boldsymbol{P}^{-1}\| \to \infty$ であるようなケースを考慮する必要はない。これは，対角化ゼロ・ファクター・モデルの効用である。対角化ゼロ・ファクター・モデルを構築することが可能であるならば，少なくとも，実証的観点から見れば，原資産ベースのオリジナルなファクター・モデルにおける，ファクター構造の特定を巡る問題を捨象することができる。

Ⅶ　おわりに

ファクター構造を特定し，ファクターの価格（リターン）を評価するという，従来一般的であったAPTの実証研究に対する批判的考察を手がかりに，代替的なAPTの検証仮説について検討してきた。その過程を通して，APTの検証仮説としては，基本的に，価格式の誤差項の二乗和の有界性（$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$）以外に表現し得ないことが明らかとなった。

対角化ゼロ・ファクター・APTは，オリジナルなAPTの真の検証仮説を反映したモデルであるだけではなく，実証的側面から見ても，扱い易いモデルである。なぜならば，ゼロ・ファクター・APTにおける誤差項の二乗和は，潜在的なファクター構造とは独立に計測し得るからであり，また，シャープの尺度という代替的な指標も存在するからである。

我々が現実に手にすることのできる情報は，分散共分散行列に関する情報である。本稿の分析は，分散共分散行列を分解することによって，ファクターと固有項に関する情報を抽出することを目的とする，因子分析に基づく統計的手法を否定するものではない。本稿は，ポートフォリオ・セオリーに代表される，資産価格評価の

領域で蓄積されてきた，ポートフォリオの収益と分散，具体的には，分散共分散行列に関する「ファクト」をAPTのベースとなるファクター・モデルに融合しようとする一つの試論である。

参考文献

[1] 飯野正幸,「APTの理論的発展」, 大阪大学経済学, Vol.39, No.1-2, 1989, 59-69ページ

[2] 飯野正幸,「資産評価理論の検証についての一考察」, 富大経済論集, 第46巻, 第5号, 1993, 111-126ページ

[3] 飯野正幸,「APTにおける因子構造の検討」, 神戸学院経済学論集, 第25巻, 第1・2号, 1993, 31-39ページ

[4] 堀本三郎,「タンジェンシー・ポートフォリオの振舞い, —「Rollの批判」を克服できるか—」, 彦根論叢, 第311号, 1998, 117-134ページ

[5] Chamberlin,G., "Funds, Factors, and Diversification in Arbitrage Pricing Thoery", *Econometrica*, Vol.51 No.5, 1983, pp.1305-1323

[6] Chamberlin,G. & Rothschild,R., "Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets", *Econometrica*, Vol.51 No.5, 1983, pp.1281-1304

[7] Dybvig,P.H. & Ross,S.A., "Yes, the APT is Testable", *Journal of Finance*, Vol.40, No.4, 1985, pp.1173-1188

[8] Gilles, C. & LeRoy, F. "On the Arbitrage Pricing Theory", Economic Theory 1, 1991, pp,213-229

[9] Huberman, G., "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Economic Theory*, Vol.28, 1982, pp.183-191

[10] Ingersoll, Jr., Jonathan E., "Some Results in the Theory of Arbitrage Pricing", *Journal of Finance*, Vol.39 No.4, 1984, pp.1021-1039

[11] Ingersoll, Jr., Jonathan E., *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield Publishers, Inc., 1987,

[12] Rao, C. R., *Linear Statistical Inference and Its Application*, 2nd edition. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1973, 奥野忠一他訳,『統計的推測とその応用』, 1977, 東京図書株式会社

[13] Reisman, H., "Reference Variables, Factor Structure, and the Approximate Multibeta Representation", *Journal of Finance*, Vol.47 No.4, 1992, pp.1303-1314

[14] Roll,R. & Ross,S.A., "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Finance*, Vol.35 No.5, 1980, pp.1073-1103

[15] Shanken,J., "The Arbitrage Pricing Theory: Is it Testable?", *Journal of Finance*, Vol.37, No.5, 1982, pp.1129-1140

[16] Shanken,J., "Multi-Beta CAPM or Equilibrium-APT?: Reply", *Journal of Finance*, Vol.40, No.4, 1985, pp.1189-1196

[17] Shanken,J., "Current Status on the Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Finance*, Vol.47, No.4, 1992, pp.1569-1574