既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在について
―将来効用の非割引のケース*―

久　保　田　　　肇[†‡]

1　はじめに

マッケンジー教授による『*Classical General Equilibrium Theory*（古典的一般均衡理論）』（2002，MIT Press）の最終章の第７章では，離散型多部門経済成長モデルが扱われ，特に，既約型一般ラムゼー成長モデルにおけるターンパイク定理がその中心的な話題になっている。そして，将来効用の割引の存在とは関係無く，最適経路が最適定常経路に収束して行く事が示されている。しかし，定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルでは，この結果の前提である最適経路の存在を，ターンパイク定理の証明で必要となる定常的な最適経路の存在以外には，示していない。しかし，マッケンジー（1986）では，非定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の一般的な存在定理を示してから，その結果を利用して定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在を示している。そこで本稿では，マッケンジー（1986）の非定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の一般的な存在定理を示す際に用いられた議論を，将来効用の割引のない定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルに

＊本稿の内容については，ロチェスター大学経済学部のマッケンジー名誉教授と，教授の著書である『*Classical General Equilibrium Theory*』（2002, MIT Press）に関して，様々な機会に行った討論に負っており，この場を借りてマッケンジー教授に感謝する。
†〒060-0809 札幌市北区北９条西７丁目　北海道大学大学院経済学研究科教授
‡堂本健二先生とは，筆者の滋賀大学経済学部に赴任以降に同一講座に所属している事もあって，様々な機会に大変お世話になりました。この機会を借りて心よりお礼申し上げ，御冥福をお祈り致します。

直接的に利用する事で，将来効用の割引のない定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルおける最適経路の存在をより簡明に示し，マッケンジー教授による『古典的一般均衡理論』の第７章における将来効用の割引のない定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルに関する議論を補完する。将来効用に割引が無いケースの定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在に関しては，ダナ/ル・バン（2003, 06）でも示されているのでその議論も参考にするが，最適経路の存在を示す議論では，マッケンジー教授による『古典的一般均衡理論』の第７章や本稿の方が，次節で述べるように，より一般的である。

2　定常的一般ラムゼー成長モデル：将来割引の無いケース

まず本節では，将来効用割引のない定常的な離散無限期間の多部門既約型一般ラムゼー成長モデルを定式化して，それに用いられる基本的な仮定を述べる。各期間内に n 個の財が存在するとする。$x(\in R^n_+)$を単位期間当たりの初期資本ストック，$y(\in R^n_+)$を単位期間当たりの最終資本ストックとして，x と y を所与の終点条件とする時に１期間内で実現可能な最大の効用水準を１期間内の効用関数として，$u(x, y)$と表す[1)]。新古典派１部門経済成長モデルでは，一人当たり消費量 c 上で定義された効用関数 $v(c)$と，労働１単位当たりに基準化された新古典派的生産関数 $f(x)$を用いて労働１単位当たりの消費を $c=f(x)-y$ として，$v(f(x)-y)=u(x, y)$とすれば，このような効用関数を導く事ができる。これが，期首と期末の資本ストックの関数として効用関数を用いる本稿のようなモデルを，既約型（還元型）と呼ぶ所以である。

効用関数 u はある集合 $D(\subset \mathbf{R}^{2n}_+)$上で定義されているとする。$D$ は技術と同時に消費者にとっての生存要件も反映している。本稿では定常的なラムゼー成長モデルを取り扱うので，u や D は通時的に一定とする。全ての t に対して$(k^{t-1}, k^t)\in D$ であれば，資本ストック経路$\{k^t\}^{\infty}_{t=0}=(k^0, k^1, \cdots)$を実現可能と

１）ただし，期間内で期首の資本ストック x から期末の資本ストック y へ変換される過程で消費活動は連続的に行われていても良い事に注意する。

呼ぶ。$\boldsymbol{k}(k^0)=\{\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\ :(k^{t-1}, k^t)\in D,\ t=1, 2, \cdots\}$を k^0から実現可能な資本ストック経路の集合とする。本節では将来効用を割り引かない無期限期間モデルを扱っているので，実現可能な資本ストック経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して，一般には無限期間の効用和$\sum_{t=1}^{\infty}=u(k^{t-1}, k^t)$は存在するとは限らず，たとえ存在したとして$+\infty$となる可能性がある。その場合には二つの実現可能な資本ストック経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$,$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$,$k^0=k'^0$に対して, $\sum_{t=0}^{\infty}u(k^{t-1},k^t)=\sum_{t=1}^{\infty}u(k'^{t-1},k'^t)=+\infty$となって，その優劣の判断が難しいが，通常は追い付きと追い越しという二つの基準に基づいて経路の優劣が判断される。追い付きに基づくものが最適性であり，追い越しに基づくものが最大性である。

ある経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が別の経路$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$に追い付くとは，任意の$\epsilon>0$に対してある $T(\epsilon)$が存在して全ての $T>T(\epsilon)$に対して$\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))<\epsilon$となる事である。そして，ある経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が同じ初期資本ストックからの任意の経路$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$に追い付けるならば，$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$を最適という。これはゲール(1967)によって導入された。すると，$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が最適というのは，同じ初期資本ストックからの任意の経路$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して$\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq 0$が成立する事であり，同じ初期資本ストックから始まる任意の他の経路との初期部分効用和を用いて比較した時に，漸近的に同程度に良くなれば最適である[2)]。また，ある経路$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$が別の経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して，ある$\epsilon>0$と $T(\epsilon)$が存在して全ての $T>T(\epsilon)$に対して$\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t)>\epsilon$となれば，経路$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$は$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$を追い越すという。ある経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$を追い越すような同じ初期資本ストックから始まる経路が存在しなければ経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$を最大(または弱最適)という。これはフォン・

2）すると，$\{k^t\}$が$\{k'^t\}$に追い付くとは，任意の$\varepsilon>0$に対して$\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq\varepsilon$となる事なので，$\varepsilon\to 0$とすれば，$\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq 0$となる。また，$\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq 0$であれば，任意の$\varepsilon>0$に対して$\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))=\inf\sup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))<\varepsilon$となる。$\sup_{\tau\geqq T}\sum_{t=1}^{\tau}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))$は減少列なので，ある $T(\varepsilon)$が存在して，任意の $T\geqq T(\varepsilon)$に対して$\sup_{\tau\geqq T}\sum_{t=1}^{\tau}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))<\varepsilon$となる。そこで $T\geqq T(\varepsilon)$とすれば，$\sup_{\tau\geqq T(\varepsilon)}\sum_{t=1}^{\tau}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))<\varepsilon$となり，任意の $T\geqq T(\varepsilon)$に対して，$\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))<\varepsilon$となって，$\{k^t\}$は$\{k'^t\}$に追い付く事になる。

バイゼッカー（1965）によって導入された。すると，$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が最大というのは，同じ初期資本ストックからの任意の他の経路と初期部分効用和を用いて比較した時に恒常的に悪くならない事であり，同じ初期資本ストックからの任意の経路$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq 0$が成立する事である[3)]。上極限と下極限の性質によって，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))$となるので，$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が最適であれば最大である。最大性は時には弱最適性と呼ばれる事もある。

ある凸集合 S（$int(S)\neq\emptyset$ とする）上で定義された凹関数を φ とする。$w\in bd(S)$に対して，$\phi(w, \epsilon)=\sup\{\varphi(z):|w-z|<\epsilon(>0), z\in S, z\neq w\}$とする。もしも $w\in S(\cap bd(S))$の時には$\varphi(w)=\lim_{\epsilon\to 0}\phi(w, \epsilon)(=\limsup_{z\to w, z\neq w}\varphi(z))$となり，それ以外の $w\in(S^c\cap bd(S))$では$\phi(w, \epsilon)\to-\infty(\epsilon\to 0)$となる時に，$\varphi$ を閉と呼ぶ[4)]。この時，$\varphi(\cdot)$は凹なので $int(S)$上で連続で故に上半連続であるが，φ が閉という条件より $w\in S\cap bd(S)$では$\varphi(\cdot)$は上半連続となるので，結局 $\varphi(\cdot)$は S 上で上半連続となる。典型的な閉な凹関数の例は $\log x: R_{++}(=(0,+\infty))\to R$ である。以下の仮定を導入する。

仮定１　効用関数 u は強凹かつ閉である。集合 D は凸である。

仮定２　ある$\zeta(>0)$と$\xi(<1)$が存在して，$\|x\|\geqq\zeta$ならば任意の$(x, y)\in D$に対して$\|y\|<\xi\|x\|(<\|x\|)$となる。

３）すると，$\{k^t\}$が$\{k'^t\}$に追越されないとは，任意の$\epsilon>0$と$s=1, 2, \ldots$に対して，ある$\tau>s$が存在して$\sum_{t=1}^{\tau}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq\epsilon$となる事である。したがって，任意の$T$に対して$\inf_{\tau\geqq T}\sum_{t=1}^{\tau}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq\epsilon$となるので，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))=\sup_{T\to\infty}\inf_{\tau\geqq T}\sum_{t=1}^{\tau}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq\epsilon$となり，$\epsilon\to 0$として，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq 0$となる。また，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))\leqq 0$とすると，任意の$\varepsilon(>0)$に対して，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))<\varepsilon$となるが，$\inf_{\tau\geqq T}\sum_{t=1}^{\tau}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))$は単調増加列なので，任意の$T$に対して，$\inf_{\tau\geqq T}\sum_{t=1}^{\tau}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))<\varepsilon$となる。故に，任意の$T$に対してある$\tau>T$が存在して$\sum_{t=1}^{\tau}((u(k'^{t-1}, k'^t)-u(k^{t-1}, k^t))<\varepsilon$となり，$\{k^t\}$は$\{k'^t\}$に追い越されない事になる。

４）凹関数の閉性についてはロッカフェラー（Rockafellar）（1970, p. 308）等を参照。ル・バン（2006, 2. 2節, p. 46）では，$\phi: X\to R\cup\{-\infty\}$が，$x\neq 0$で通常の意味で連続で，更に，$x^n\to 0\Rightarrow\phi(x^n)\to-\infty$となる時に，$\phi(\cdot)$を一般的な意味での連続関数として定義している。二番目の条件の部分が閉性の $w\in(S^c\cap bd(S))$において$\phi(w, \epsilon)\to-\infty(\epsilon\to 0)$となる部分に対応している。

仮定３　もしも$(x, y)\in D$ならば，全ての$z \geqq x, 0 \leqq w \leqq y$に対して$(z, w)\in D$であり，更に，$u(z, w) \geqq u(x, y)$が成立する。

仮定４　ある$(\bar{x}, \bar{y})\in D$が存在して，$\bar{y} > \bar{x}(\geqq 0)$が成立する。

通常は，効用関数uの連続性やDの閉性を仮定している事が多いが，仮定１では，効用関数が定義されている集合Dの閉性が仮定されていない。ダナ/ル・バン(2003, 06)の最適経路の存在に関する部分では，効用関数uの強凹性と連続性やDのコンパクト性も仮定しているので，仮定１の方がより一般的である。仮定２からは以下で示すように，どのような実現可能な資本ストックの経路も有界で無限に発散して行かない。ダナ/ル・バン(2003, 06)ではDのコンパクト性を仮定しているので，どのような実現可能な資本ストックの経路も自動的に有界となる。仮定３は自由処分であり，期首の資本ストック投入量を増やす事や期末の資本ストックを減らす事が常に可能であることを示しているが，それに対応してその際の効用も，期首の資本ストックを増やしたり，期末の資本ストックを減らしたりすれば効用が増加するとしている。これは，期首の資本ストック投入量を増やせばその期間で利用可能な産出が増加してその

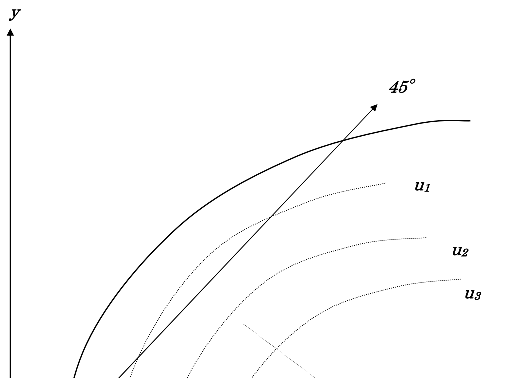

図１

分利用可能消費が増加するので効用が増加し，また，期末の資本ストックを減らせばその分だけその期間で利用可能な消費が増加するので効用が増加する，という事に対応している[5)]。仮定４は，資本ストックの各座標が増加しているような，拡張可能な資本ストックが存在する事を主張している[6)]。

3　いくつかの補題

本節では，将来効用の割引のない定常的な既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在を示すために必要となる，幾つかの補題を示す[7)]。ワイエルシュトラスの一般最大値定理では，効用関数 u の上半連続性と集合 D の有界閉性の下で，最大点の存在を示すのであるが，最初に，仮定１の効用関数の閉性の下では，集合 D の閉性が無くても有界閉部分集合との非空な共通集合上で必ず最大点が存在する事を示す。B を R_+^{2n} の有界閉集合とする。

補題１　$B\cap D(\neq\emptyset)$ ならば u は $B\cap D$ 上で最大点を実現する。

証明． まず，u が $B\cap D$ 上で上に有界でなく，ある $(x^\nu, y^\nu)_{\nu=1}^{\infty}\subset B\cap D$ が存在して $u(x^\nu, y^\nu)\uparrow+\infty$ とする。$(x^\nu, y^\nu)_{\nu=1}^{\infty}\in B$ より $(x^\nu, y^\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ は有界なので，ある (x, y) に対して $(x^\nu, y^\nu)\to(x, y)\in(cl(D)\cap B)(\nu\to\infty)$ としてよい。$(x, y)\in cl(D)\backslash D(=bd(D)\backslash D)$ とすると，　u の閉性より $u(x^\nu, y^\nu)\downarrow-\infty$ となるので，$u(x^\nu, y^\nu)\uparrow+\infty$ に矛盾して，故に，$(x, y)\in(bd(D)\cap D)$ か $(x, y)\in int(D)$ となって，いずれにしても $(x, y)\in D$ となる。すると，u は D 上で上半連続なので，その定義より $\limsup_{\nu\to\infty} u(x^\nu, \mathrm{y}^\nu)=+\infty\leqq u(x, y)<+\infty$ となって矛盾が起こり，故に，u は $B\cap D$ 上で上に有界である。そこで，$M=\sup\{u(x, y):(x, y)\in B\cap D\}<+\infty$ とする。上限の定義より，ある $(x^\nu, y^\nu)_{\nu=1}^{\infty}\subset B\cap D$ が存在して $u(x^\nu, y^\nu)\uparrow M(\nu\to\infty)$ となるが，再び，$(x^\nu, y^\nu)_{\nu=1}^{\infty}\in B$ より $(x^\nu, y^\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ は有

5）ダナ/ル・バン(2003, 06)でも仮定３, ４をおいている。

6）この時，仮定３より $(\bar{x}, \bar{x})\in D$ かつ $(\bar{y}, \bar{y})\in D$ となるが，仮定１より D は凸なので $[(\bar{x}, \bar{x}), (\bar{y}, \bar{y})]\subset D$ となり, 故に, $((\bar{x}, \bar{x})+(\bar{y}, \bar{y}))/2=((\bar{x}+\bar{y})/2, (\bar{x}+\bar{y})/2)\epsilon((\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}))\subset int(D)$ となって，$int(D)\neq\emptyset$ である。

7）補題１, ２は将来効用の割引があるケースでも成立する。

界なので，ある(x, y)に対して$(x^{\nu}, y^{\nu})\to(x, y)\in cl(D)$ $(\nu\to\infty)$としてよい。$(x, y)\in cl(D)\backslash D(=bd(D)\backslash D)$とすると，$u$の閉性より$u(x^{\nu}, y^{\nu})\downarrow -\infty$となるので，$u(x^{\nu}, y^{\nu})\uparrow M$に矛盾して，故に，$(x, y)\in D$となる。すると，$u$は$D$上で上半連続なので，定義より$\limsup_{\nu\to\infty} u(x^{\nu}, y^{\nu})=M\leqq u(x, y)\leqq M$となって$u(x, y)=M$となり，故に，$u$は$(x, y)\in B\cap D$において$B\cap D$上の最大値を実現する事になる。□

この証明では，uが$B\cap D$上で上半連続かつ閉であればよく，その凹性は用いていない事，また，uが閉であればDが閉集合である必要もない事に，各々注意する[8)]。もしもuがDの有界な部分集合上D'に制限されるケースでは，この証明の前半部分で示されているように，uがD'上で上に有界という事は成立してD'上でのuの上限がD上の点で実現するが，D'上の点で実現するとは限らない。

次に，仮定２から実現可能な資本ストックの経路はどれも有界で無限に発散して行かない事を示す。

補題２　もしも$\{k^t\}$, $t=0, 1, \cdots$が実現可能な経路であれば，全てのtに対して$\|k^t\|\leqq\max(\|k^0\|, \zeta)$となる。

証明．$(z, w)\in D$で$\|z\|\leqq\zeta$とする。$z\leqq z'$で$\|z'\|=\zeta$となるz'を考えると，仮定３の自由処分より$(z', w)\in D$となるが，$\|z'\|=\zeta$と仮定２より，$\|w\|<\xi\|z'\|<\|z'\|=\zeta$となって，$\|w\|<\zeta$となる。したがって，$(k^0, k^1)\in D$で$\|k^0\|\leqq\zeta$ならば$\|k^1\|\leqq\zeta$となり，帰納的に考えれば$\|k^t\|\leqq\zeta$, $\forall t=0, 1, 2, \cdots$となる。一方，$(z, w)\in D$で$\|z\|>\zeta$とすると，仮定２より$\|w\|<\xi\|z\|<\|z\|$となって$\|w\|<\|z\|$であるが，更に$(w, x)\in D$とすると，$\|w\|\leqq\zeta$か$\|w\|>\zeta$であり，$\|w\|>\zeta$であれば，仮定２より$\|x\|<\xi\|w\|<\|w\|$となって$\|x\|<\|w\|<\|z\|$となる。また，$\|w\|\leqq\zeta$であれば，既に示した事によって$\|x\|<\zeta$である。したがって，$(k^0, k^1), (k^1, k^2)\in D$で$\|k^0\|>\zeta$ならば$\|k^0\|>\|k^1\|>\|k^2\|$か$\|k^2\|\leqq\zeta(<\|k^0$

8）武隈(2001, 第14章第２節)では，将来効用の割引のないケースで，最適経路の存在は議論していないが，効用関数uを連続で技術集合Dを閉凸集合としてターンパイク定理を示している。

$\|$)となり，帰納的に考えれば，$\|k^t\| \leqq \|k^0\| \, \forall t=0, 1, 2, \cdots$となる。故に，実現可能などのような経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対しても，$\|k^t\| \leqq \max(\zeta, \|k^0\|) \, \forall t=0, 1, 2, \cdots$となる。□

初期の資本ストック k^0を所与とすると，補題２によって k^0から実現可能な任意の経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$は一様に有界となるので，補題１より，ある $M>0$が存在して，$\sup\{\sup_{\tau \geqq 1} u(k^t, k^{t+1}) : \{k^t\}_{t=0}^{\infty}$は k^0から実現可能$\} \leqq M$となり，k^0から実現可能な任意の経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対しては，各期の効用 $u(k^t, k^{t+1})$は一様に上に有界となる。

資本ストック k は$(k, k) \in D$ となっていれば維持可能資本ストックと呼ぶ。また, 実現可能な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$は全ての t に対して$(k^{t-1}, k^t) = (k, k) \in D$ となっていれば定常的と呼ぶ。そして，維持可能資本ストックの中で期間内の効用 $u(k, k)$を最大にする資本ストック $\bar{k}$ を最大効用維持可能資本ストック，対応する効用 $u(\bar{k}, \bar{k})$を最大維持可能効用と呼ぶ。仮定４の自由処分があるので, $u(\bar{k}, \bar{k}) = \max\{u(x, x) : (x, x) \in D\} = \max\{u(x, y) : (x, y) \in D, y \geqq x\}$である。上記の仮定の下では一意的な最大効用維持可能資本ストックの存在が示せて，更に，全ての t に対して$(k^{t-1}, k^t) = (\bar{k}, \bar{k}) \in D$ となる定常経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$の最適性も示せる。このような定常経路を最適定常経路と呼ぶ。そして，この事を利用して，任意の拡張的な資本ストックには常に最適経路が存在する事を示す。これが本稿の目標である。

そこで，このような最大維持可能資本ストック $\bar{k}$ が一意的に存在する事を示し，双対変数(価格)を用いて，$(\bar{k}, \bar{k}) \in D$では効用を含んだ利潤最大化が実現する事を示す。

補題３　一意的な$(\bar{k}, \bar{k}) \in D$とある $p \geqq 0$が存在して，$\bar{u} = u(\bar{k}, \bar{k}) = \max\{u(x, x) : (x, x) \in D\}$とすると，任意の$(x, y) \in D$ に対して $u(x, y) + py - px \leqq \bar{u}$ となる。

証明． $V = \{v \mid v = y - x, (x, y) \in D\}$とする。$D$ の凸性より V は凸である[9)]。

9）実際，$v, v' \in V, \alpha \in (0, 1)$として，$v = y - x, \exists (x, y) \in D, v' = y' - x', \exists (x', y') \in D$ とすると，$\alpha v + (1-\alpha) v' = \alpha(y - x) + (1-\alpha)(y' - x) = (\alpha y + (1-\alpha) y') - (\alpha x + (1-\alpha) x')$となる↗

自由処分と拡張可能ストックの存在によって$0 \in int(V)$となる。実際，仮定８より$(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, $\bar{x} < \bar{y}$であり，自由処分より$(\bar{y}, \bar{x}) \in D$となるが，$\bar{z} = (\bar{x} + \bar{y})/2$とすれば$D$の凸性から$(\bar{z}, \bar{z}) \in D$となって，$0 = \bar{z} - \bar{z} \in V$となり，再び自由処分より$\bar{x} < x' < \bar{y}$と$\bar{x} < y' < \bar{y}$に対して$(x', y') \in D$となるので，$x' - y' \in V$となり，故に，$0 \in int(V)$となる[10)]。最初に，所与の$v \in V$に対して，$y - x \geqq v$ならば$(x, y)$は有界である事を示す。まず，資本ストックとしての定義からxとyは下に有界である。今，$\exists v \in V$が存在して$D_v = \{(x, y) \in D | y - x \geqq v\}$が上に非有界で，$\|x^s\| + \|y^s\| \to \infty\ (s \to \infty)$となる点列$(x^s, y^s)_{s=0}^{\infty}$が$D_v$に存在したとする。$y^s - v \geqq x^s \geqq 0$より$\|x^s\| \leqq \|y^s - v\| \leqq \|y^s\| + \|v\|$となって，$\xi < 1 = \frac{\|x^s\|}{\|x^s\|} \leqq \frac{\|y^s\|}{\|x^s\|} + \frac{\|v\|}{\|x^s\|}$となるので，$\frac{\|v\|}{\|x^s\|} \to 0\ (s \to \infty)$より十分に大きい$s$に対しては$\|y^s\|/\|x^s\| > \xi\ (<1)$となる。しかし，$x^s$が(上に)非有界なので$\|x^s\| > \zeta$となる$x^s$を考えると，$(x^s, y^s) \in D$なので仮定６より$\|y^s\| < \xi \|x^s\|$となり，故に，$\|y^s\|/\|x^s\| < \xi$となって矛盾が起こる。したがって，$(x^s)_{s=0}^{\infty}$は有界である。また，$y^s$が上に非有界であれば，$y^s$が下に有界なので，$y^s$の座標には$+\infty$に発散して行くものがあり，ある$i$に対して$y_i^s \to +\infty$となる。そこで，$x^s$の対応する座標$x_i^s$を$y_i^s - v_i^s$に置き換えたものを$x'^s$とすれば，$y^s \geqq x'^s + v$であり，仮定３の自由処分によって，$(x'^s, y^s) \in D$となる。しかし，ある$i$に対して$x'^s_i \to +\infty\ (s \to \infty)$より$\|x'^s\| \to \infty\ (s \to \infty)$となるので，既に示した$(x'^s, y^s) \in D$ならば$(x'^s)_{s=0}^{\infty}$が有界という事に矛盾する。したがって，任意の$v \in V$に対して$D_v$は有界で，ある($R^{2n}$の)閉球$B_v$に対して$D_v \subset B_v$となる。そこで，$T_v = \{(x, y) \in (\mathrm{R}_+^{2n} \cap B_v) | v \leqq y - x\}$すると，$T_v$は($\mathrm{R}^{2n}$の)有界閉集合で$D_v = T_v \cap D$と表現される。

$f(v) = \sup\{u(x, y) : (x, y) \in D_v\}$と定義する[11)]。特に，$u$は仮定１によって凹なので$f(v)$も凹となる[12)]。更に，$u$は仮定１によって上半連続で閉で，しか

↘　が，Dの凸性より$(\alpha x + (1-\alpha)x', \alpha y + (1-\alpha)y') \in D$なので，$\alpha v + (1-\alpha)v' \in V$となって，$V$は凸である。

10）この時，$(\bar{z}, \bar{z}) \in int(D)$となっている事にも注意。

11）$v \leqq v'$ならば$D_{v'} \subset D_v$なので，$f(v) \geqq f(v')$となる。

12）$v, v' \in V$, $\alpha \in (0, 1)$に対して$v\alpha = \alpha v + (1-\alpha)v'$とする。任意の$(x, y) \in D_v$, $(x', y') \in \mathrm{D}_{v'}$に対しては，$x\alpha = \alpha x + (1-\alpha)x'$, $y\alpha = \alpha y + (1-\alpha)y'$とすると，$D$の凸性から$(x\alpha, y\alpha) \in D$となり，更に，$y\alpha = \alpha y + (1-\alpha)y' \geqq \alpha(x + v) + (1-\alpha)(x' + v') = x\alpha + v\alpha$となるので$(x\alpha, y\alpha)$↗

も直ぐ上で述べたように有界閉集合 T_v に対して $D_v = T_v \cap D$ となるので，補題１よりある $(x, y) \in D_v$ が存在して $f(v) = u(x, y)$ となり，この上限は実現される。そして，これは任意の $v \in V$ に対して成立する。すると，特に，$f(0) = \sup\{u(x, y) : (x, y) \in D_0\} = \sup\{u(x, y) : (x, y) \in D, y \geqq x\} = \sup\{u(x, x) : (x, x) \in D\} = u(\bar{k}, \bar{k})$ $\exists (\bar{k}, \bar{k}) \in D$ なので，最大維持可能効用が $(\bar{k}, \bar{k}) \in D$ において $u(\bar{k}, \bar{k})$ として実現する。そして，最大維持可能効用 $f(0)$ が異なる二つの $(\bar{k}, \bar{k})$, $(\bar{k}', \bar{k}') \in D$ で実現したとすると，$f(0) = u(\bar{k}, \bar{k}) = u(\bar{k}', \bar{k}')$ となるが，仮定１の D の凸性より $((\bar{k}, \bar{k}) + (\bar{k}', \bar{k}'))/2 \in D_0$ であり，更に，u の強凹性より，$f(0) = (u(\bar{k}, \bar{k}) + u(\bar{k}', \bar{k}'))/2 < u(((\bar{k}, \bar{k}) + (\bar{k}', \bar{k}'))/2) \leqq \sup\{u(x, y) : (x, y) \in D_0\} = f(0)$ となって矛盾が起こる。故に，最大維持効用 $f(0)$ を実現する最大維持可能資本ストック $(\bar{k}, \bar{k}) \in D$ は一意的である。

　$W = \{(v, u) | v \in V$ かつ $u \leqq f(v)\}$ とする。最大維持可能効用を $\bar{u} = f(0)$ とする。f の凹性と V の凸性より W は凸であり，また，$(0, \bar{u})$ は W の境界点の一つである[13)]。すると，凸集合に関する分離定理によって，ある $(p, \pi) \in \mathbf{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ が存在して任意の $(v, u) \in W$ に対して $pv + \pi u \leqq \pi \bar{u}$ となる[14)]。所与の u に対して仮定３より $(x, y) \in D$ ならば任意の i 座標と $\alpha (>0)$ に対して $(x + \alpha e_i, y) \in D$ となるので $(v - \alpha e_i) \in V$ となり，V は下に非有界であり，また，$u(x, y) \leqq u(x + \alpha e_i, y) \leqq f(v - \alpha e_i)$ より $f(v) \leqq f(v - \alpha e_i)$ である。すると，$(v, u) \in W$ に対して，十分に大きい $\alpha (>0)$ を考えると $v - \alpha e_i \in V$ であり，また，$u \leqq f(v) \leqq f(v - \alpha e_i)$ なので $(v - \alpha e_i, u) \in W$ である。そこで，ある i に対して $p_i < 0$ であれば十分に大きい $\alpha (>0)$ に対して $(v - \alpha e_i, u) \in W$ なので，$p(v - \alpha e_i) + \pi u = pv - \alpha p_i \leqq \pi \bar{u}$ であるが，$-\alpha p_i \uparrow \infty (\alpha \uparrow \infty)$ なので十分に大きい $\alpha (>0)$ に対して $pv - \alpha p_i > \pi \bar{u}$ となって矛盾が起こる。故に，$p \geqq 0$ である。今，$\pi \leqq 0$ と

↘ $\in D_{v\alpha}$ となる。故に，u の凹性を考慮に入れれば，$f(v\alpha) = \sup\{u(x, y) : (x, y) \in D_{v\alpha}\} \geqq u(x\alpha, y\alpha) = \alpha u(x, y) + (1 - \alpha) u(x', y')$ となるが，最右辺における $(x, y) \in D_v, (x', y') \in D_{v'}$ は任意だったのでそれらの上限を取れば，$f(v\alpha) \geqq \alpha \sup\{u(x, y) : (x, y) \in D_v\} + (1 - \alpha) \sup\{u(x', y') : (x', y') \in D_{v'}\} = \alpha f(v) + (1 - \alpha) f(v')$ となるので，$f(\cdot)$ は凹である。

13）これは，$(0, \bar{u})(\in W)$ が W の境界点でなければ，$f(0) \geqq u' > \bar{u}$ となる $(0, u') \in W$ が存在する事になって，$u = f(0)$ の定義に矛盾するからである。

14）この分離定理については，例えば，丸山（2002, 定理3.9’, p.103）を参照。

する。$(p, \pi) \neq 0$であり，全ての$(u, v) \in W$に対して$pv \leqq \pi(\bar{u}-u)$となる。まず$\pi=0$ならば，$(p, \pi) \neq 0$より$p \geq 0$なので，仮定4より$\bar{y}-\bar{x}=\bar{v}>0$となる事を考慮すれば$0<p\bar{v} \leqq \pi(\bar{u}-u)=0$となって矛盾が起こる。次に，$\pi<0$とする。$0 \in int(V)$より0を含む十分に小さい開区間$I$に対して$I \subset int(V)$となるが，$f$は$V$上で凹なので$int(V)$上で連続であり，$I$上でも連続である。$W$の作り方から$(v, u) \in W$とすると$u \geqq u'$ならば$(v, u') \in W$となるので，$\bar{u}$に対しても$u'<\bar{u}(=f(0))$ならば$(0, u') \in W$となる。そして，$v'(>0)$が0に十分近ければ$v' \in I \subset int(V)$であり，故に，$f$の0での連続性より$u'<f(v')$となるので$(u', v') \in W$となる。すると，$p \geqq 0$が成立しているので$v' \geqq 0$を考慮すれば$0 \leqq pv' \leqq \pi(\bar{u}-u')<0$となって矛盾が起こり，$\pi<0$も成立しない。したがって，$p \geqq 0$, $\pi>0$となり，そこで(p, π)を$\pi=1$となるように基準化すれば，結局$(v, u) \in W$に対して$pv+u \leqq \bar{u}$となる。そして，$(x, y) \in D$に対して$y-x \in V$, $u(x, y) \leqq f(y-x)$なので，$(y-x, u(x, y)) \in W$となり，故に，$u(x, y)+py-px \leqq \bar{u}$ $\forall (x, y) \in D$が成立する。□

この証明における$(x, y) \in D$に対して$u(x, y)+py-px \leqq u(\bar{k}, \bar{k})$となる部分の議論では，$u$の凹のみを使用していて仮定1の$u$の強凹性までは必要ではない。仮定1の$u$の強凹性は上で見つけた最大維持可能効用$u(\bar{k}, \bar{k})$を実現する$(\bar{k}, \bar{k})$の一意性を示す際に利用している[15)]。$\pi=1$を考慮して$p$を効用表示の財価格ベクトルと想定し，期首の資本ストックを使う事で期間内の生産工程から得られるのが効用と期末資本ストックと想定すれば，$u(x, y)+py-px$は期間内の効用表示の利潤と想定できる。故に，$u(x, y)+py-px \leqq \bar{u}+p\bar{k}-p\bar{k}, \forall (x, y) \in D$という補題の結果は，$D$上での期間内の効用表示の利潤最大化が$(\bar{k}, \bar{k}) \in D$において実現する事を述べている[16)]。

ここで，任意の$(x, y) \in D$に対して，$(\bar{k}, \bar{k}) \in D$に相対的な損失価値（*value*

15）第4節の最後で示すように，uの凹性の下でも，最大維持可能効用$u(\bar{k}, \bar{k})$を実現する$(\bar{k}, \bar{k})$の一意性が成立すれば，最適経路の存在を示す事ができる。

16）補題3での最大維持可能効用が$u(\bar{k}, \bar{k})=\bar{u}$において実現して，$p$を補題3でその存在が示されたベクトルとする時に，全てのtに対して$k^t=\bar{k}$となる経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$は，全てのtに対して$p^t=p$となる価格列$\{p^t\}_{t=0}^{\infty}$によって支持されると呼ばれる。

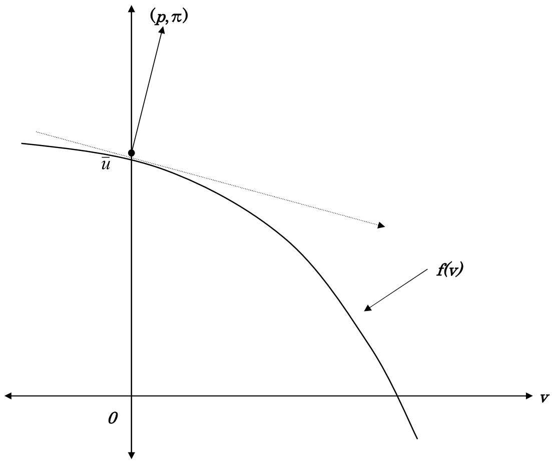

図２

$loss)\delta(x,y)$を$\delta(x,y)=\bar{u}-u(x,y)-py+px\geqq 0$と定義する。$u$の閉性より，$(x^s,y^s)\in D,(x^s,y^s)\to(x,y)\in cl(D)\backslash D(=bd(D)\backslash D)$であれば，点列$(x^s,y^s)$は収束しているので有界で$-py^s+px^s$も有界であり，故に，$u$の閉性より，$u(x^s,y^s)\to-\infty$なので，$\delta(x^s,y^s)\to\infty(s\to\infty)$となる。また，$u$の強凹性から$\delta(x,y)=0\to(x,y)=(\bar{k},\bar{k})$となる[17)]。この時，$(x,y)\neq(\bar{k},\bar{k})$ならば$\delta(x,y)>0$となるが，実際には以下のように，$(x,y)\in D$が$(\bar{k},\bar{k})\in D$より一様に離れていれば，その損失価値$\delta(x,y)$も一様に正になる。

補題４　$\eta>0$を所与とする。任意の$\epsilon>0$に対してある$\delta_\epsilon>0$が存在して，$\|x\|<\eta$となる任意の$(x,y)\in D$に対して$\|((x,y),(\bar{k},\bar{k}))\|>\epsilon$ならば$\delta(x,y)>\delta_\epsilon$となる[18)]。

17）実際，ある$(x,y)\neq(\bar{k},\bar{k})$で$\delta(x,y)=\bar{u}-u(x,y)-py+px=0$とすると，$(x',y')=((x,y)+(\bar{k},\bar{k}))/2\in D$に対して，$u$の強凹性から$u(x',y')>(u(x,y)+u)/2$となるので，$0\leqq\delta(x',y')=\bar{u}-u(x',y')-py'+px'=\bar{u}-u(((x,y)+(\bar{k},\bar{k}))/2)-p(y+\bar{k})/2+p(x+\bar{k})/2<\bar{u}-(u(x,y)+\bar{u})/2-p(y+\bar{k})/2+p(x+\bar{k})/2=(\bar{u}-u(x,y)-py+px)/2=\delta(x,y)/2=0$となって矛盾が起こるからである。

18）効用関数が単なる凹の時には，$F^*=\{(x,y)\in D:\delta(x,y)=\bar{u}-u(x,y)-py+px=0\}$となる集合をフォンノイマン面と定義すれば，帰結は$d((x,y),F^*)=\inf\{\|(x,y)-(x',y')\|:(x',y')\in F^*\}>\epsilon$ならば$\delta(x,y)>\delta_\epsilon$となる。

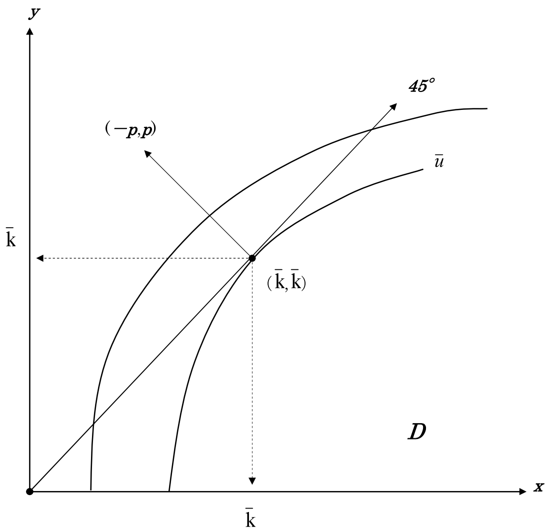

図3

証明． 補題が成立しないとする。すると，ある $\epsilon>0$ とある点列(x^s, y^s)が存在して，全ての s に対して $\|((x, y), (\bar{k}, \bar{k}))\|>\epsilon$ かつ $\|x^s\|<\eta$ でしかも $\delta(x^s, y^s)\to 0$ となる。$(x^s)_{s=1}^{\infty}$ は有界なので，仮定２と３より$(y^s)_{s=1}^{\infty}$ も有界になり，点列$(x^s, y^s)_{s=0}^{\infty}$ は有界である[19)]。故に，集積点$(\bar{x}, \bar{y})\in cl(D)$が存在して，$\|((\bar{x}, \bar{y}), (\bar{k}, \bar{k}))\|\geqq\epsilon(>0)$ であり，もちろん，$(\bar{x}, \bar{y})\neq(\bar{k}, \bar{k})$である。$(x^s, y^s)\to(\bar{x}, \bar{y})(s\to\infty)$より$(-py^s+px^s)\to(-p\bar{y}+p\bar{x})(s\to\infty)$なので，$\delta(x^s, y^s)\to 0(s\to\infty)$より $u(x^s, y^s)\to\bar{u}-p\bar{y}+p\bar{x}(s\to\infty)$となって，数列$(u(x^s, y^s))_{s=0}^{\infty}$も収束して有界である。そして，$(\bar{x}, \bar{y})\in cl(D)\backslash D=bd(D)\backslash D$ であれば，D 上での u の閉性より $u(x^s, y^s)\to-\infty(s\to\infty)$となって$(u(x^s, y^s))_{s=0}^{\infty}$ の有界性に矛盾するので，$(\bar{x}, \bar{y})\in D$ である。すると，D 上での u の上半連続性より，$\lim_{s\to\infty}u(x^s, y^s)=\limsup_{s\to\infty}u(x^s, y^s)\leqq u(\bar{x}, \bar{y})$となるが，$0=\lim_{s\to\infty}\delta(x^s,$

19) $\|x^s\|<\eta,\ s=1, 2\ldots$なので，$\eta'=\max(\eta, \zeta)$として $z^s=\eta' e(\geqq x^s\geqq 0)$とすると，仮定３から$(z^s, y^s)\in D$ となって仮定２より $\|y^s\|<\xi\|z^s\|=\xi\eta'(<\infty)$となるので，$(y^s)_{s=1}^{\infty}$は有界である。

$y^s)=\lim_{s\to\infty}(\bar{u}-u(x^s, y^s)-py^s+px^s)=\bar{u}-\lim_{s\to\infty}u(x^s, y^s)+\lim_{s\to\infty}(px^s-py^s)\geqq\bar{u}-u(\bar{x}, \bar{y})-p\bar{y}+p\bar{x}=\delta(\bar{x}, \bar{y})\geqq 0$なので，$\delta(\bar{x}, \bar{y})=0$となる。しかし，既に示したように，$\delta(\bar{x}, \bar{y})=0$ならば$(\bar{x}, \bar{y})=(\bar{k}, \bar{k})$なので，$(\bar{x}, \bar{y})\neq(\bar{k}, \bar{k})$に矛盾し，故に，この補題が成立する。□

この補題より，任意の$\epsilon>0$に対してある$\delta_\epsilon>0$が存在して，$\|x\|<\zeta$となる任意の$(x, y)\in D$に対して$\delta(x, y)\leqq\delta_\epsilon$ならば$\|((x, y), (\bar{k}, \bar{k}))\|\leqq\epsilon$となるので，ある経路の損失価値が0に収束してある十分に小さい大きさに収まっていれば，その経路が最大効用維持可能資本ストック$\bar{k}$から徐々に離れて行く事はない。

ところで，総損失価値$\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1})$を無限級数とみなすと，実行可能な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して損失価値$\delta(k^t, k^{t+1})=\delta_t$が非負なので，無限級数$\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1})=\sum_{t=0}^{\infty}\delta_t\geqq 0$は$+\infty$も含めて存在する。また，$\delta_t\geqq 0$より$\sum_{t=0}^{T}\delta_t\geqq 0$であり，$p, k^0, k^T\geqq 0$より，$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})=pk^0-pk^T-\sum_{t=0}^{T}\delta_t\leqq pk^0-\sum_{t=1}^{T}\delta_t\leqq pk^0$となるので，初期資本ストック$k^0$から実現可能な任意の経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)$に対して，$(\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u}))_{t=0}^{\infty}$は$pk^0$によって一様に上に有界であり，故に，$\sup_{\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)}(\sup_{T\geqq 0}((\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u))_{t=0}^{\infty}))\leqq pk^0<+\infty$である。一方，$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})=pk^0-pk^T-\sum_{t=1}^{T}\delta_t\geqq -pk^T-\sum_{t=1}^{T}\delta_t$であるが，補題1より$(k^t)_{t=0}^{\infty}$は有界なので$-pk^T$も下に有界で，ある$\lambda>0$に対して$\inf_{T\geqq 0}(-pk^T)>-\lambda$となる。すると，$\sum_{t=0}^{\infty}\delta_t<\infty$であれば，任意の$T$に対して$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u)=pk^0-pk^T-\sum_{t=1}^{T}\delta_t\geqq -pk^T-\sum_{t=1}^{T}\delta_t\geqq -\lambda-\sum_{t=1}^{\infty}\delta_t>-\infty$となって，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})>-\infty$となる。$\sum_{t=0}^{\infty}\delta_t=\infty$であれば$(-\lambda-\sum_{t=1}^{T}\delta_t)\downarrow-\infty\ (T\to\infty)$となるので$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})\downarrow-\infty\ (T\to\infty)$となり，$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})=-\infty$となる[20]。故に，以下が成立する。

補題5　任意の実現可能な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})>-\infty$となるか，または，$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})=-\infty$となる[21]。

20）故に，$\sum_{t=0}^{\infty}\delta_t<\infty\Longleftrightarrow\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})>-\infty$である。

そして，特に，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1},k^t)-\bar{u})>-\infty$となる経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$を良好と呼び，初期資本ストック$k^0$からの良好な経路の集合を$\mathbf{k}^G(k^0)=\{\{k^t\}_{t=0}^{\infty}:\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1},k^t)-\bar{u})>-\infty\}$とする。$\sum_{t=0}^{\infty}\delta_t\geqq 0$が$+\infty$も含めて存在する事と lim inf の定義より，良好な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$については，経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が良好($\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1},k^t)-\bar{u})>-\infty)\Longleftrightarrow\sum_{t=0}^{\infty}\delta_t<\infty\Longleftrightarrow\exists\lambda>-\infty,\ \sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1},k^t)-\bar{u})\geqq\lambda,\ \forall T=1,2,\ldots\Longleftrightarrow\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1},k^t)-u(k'^{t-1},k'^t))>-\infty,\ \forall\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$と特徴付ける事ができる[22]。

$\boldsymbol{k}^G(k^0)\neq\emptyset$であれば，最大経路$\{k^{*t}\}_{t=0}^{\infty}$は良好であることを示す。

補題６　k^0から始まる良好な経路が存在して$\boldsymbol{k}^G(k^0)\neq\emptyset$であれば，$k^0$からの最大経路$\{k^{*t}\}_{t=0}^{\infty}$は良好であり，故に，$k^0$からの最適経路$\{k^{*t}\}_{t=0}^{\infty}$は良好である。

証明.　$\{k^{*t}\}_{t=0}^{\infty}$を最大経路とすると，最大性の定義より，$k^0$からの任意の経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1},k^t)-u(k^{*t-1},k^{*t})))\leqq 0$となる。損失価値の定義から$u(k^{*t-1},k^{*t})=\bar{u}+pk^{*t-1}-pk^{*t}-\delta(k^{*t-1},k^{*t})$, $u(k^{t-1},k^t)=\bar{u}+pk^{t-1}-pk^t-\delta(k^{t-1},k^t)$なので，$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1},k^t)-u(k^{*t-1},k^{*t})))=\sum_{t=1}^{T}(\delta(k^{*t-1},k^{*t})-\delta(k^{t-1},k^t))+pk^{*T}-pk^T\geqq\sum_{t=1}^{T}(\delta(k^{*t-1},k^{*t})-\delta(k^{t-1},k^t))-pk^T$となる。補題２から経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$は有界なので，ある$m>0$が存在して，十分に大きい任意の$T$に対して$pk^T\leqq m$とできて，結局，十分に大きい任意の$T$に対して$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1},k^t)-u(k^{*t-1},k^{*t})))\geqq\sum_{t=1}^{T}(\delta(k^{*t-1},k^{*t})-\delta(k^{t-1},k^t))-m$となり，$\sum_{t=1}^{T}(\delta(k^{*t-1},k^{*t})\leqq\sum_{t=1}^{T}\delta(k^{t-1},k^t)+\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1},k^t)-u(k^{*t-1},k^{*t})))+m$となる。すると, lim inf と lim sup の関係より, $\sum_{t=1}^{\infty}(\delta(k^{*t-1},k^{*t})=\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(\delta(k^{*t-1},k^{*t})\leqq\liminf_{T\to\infty}(\sum_{t=1}^{T}\delta(k^{t-1},k^t)+\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1},k^t)-u(k^{*t-1},k^{*t})))+m\leqq\limsup_{T\to\infty}$

21）実際には，以下の系２で示すように，任意の実行可能な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して，$\sum_{t=0}^{\infty}(u(k^t,k^{t+1})-u)=\lim_{T\to\infty}\sum_{t=0}^{T}(u(k^t,k^{t+1})-\bar{u})\in R\cup\{-\infty\}$となる。

22）最後の部分については，経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が良好であれば，$\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1},k^t)-u(k'^{t-1},k'^t))=\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1},k^t)-\bar{u})-\sum_{t=1}^{T}((u(k'^{t-1},k'^t)-\bar{u})\geqq\lambda-pk'^0>-\infty$となり，一方，$k'^t=\bar{k},\ \forall T=1,2\ldots$とすれば，$\exists\lambda>\infty,\ \sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1},k^t)-\bar{u})\geqq\lambda,\ \forall T=1,2\ \ldots$となって経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が良好，ということから従う。

$\sum_{t=1}^{T}\delta(k^{t-1}, k^t)+\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(k^{*t-1}, k^{*t})))+m=\sum_{t=1}^{\infty}\delta(k^{t-1}, k^t)+\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(k^{*t-1}, k^{*t})))+m$ となるが，経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$として良好な経路を選ぶと，その同値表現より$\sum_{t=1}^{\infty}(\delta(k^{t-1}, k^t)<\infty$であり，また，$(k^{*t})_{t=0}^{\infty}$は最大なのでその定義より上式の最右辺の第二項$\leqq 0$となって，$\sum_{t=1}^{\infty}(\delta(k^{*t-1}, k^{*t})\leqq\sum_{t=1}^{\infty}(\delta(k^{t-1}, k^t)+m<\infty$となる。故に再び良好な経路の同値表現より，経路$\{k^{*t}\}_{t=0}^{\infty}$は良好である。□

次に，k^0から始まる良好な経路が存在する条件を考える。k^0が拡張可能資本ストックであれば，k^0から始まる良好な経路が存在し，$\mathbf{k}^G(k^0)\fallingdotseq\emptyset$ となる。

補題７　資本ストック x が拡張可能資本ストックであり，また，k が維持可能資本ストックならば，$k^0=x$ で $\tilde{k}^t\to k(t\to\infty)$となる経路$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が存在する。特に，$k$ として最大効用維持可能資本ストック $\bar{k}$ を利用して $k=\bar{k}$ とすれば，$\sum_{t=1}^{\infty}(u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)-\bar{u})>-\infty$となって，経路$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$は良好であり，$\mathbf{k}^G(k^0)\neq\emptyset$ となる。

証明． x が拡張的なので，ある $y(>x)$が存在して$(x, y)\in D$ となる。今，$0<\alpha<1$として，$\alpha^t(x, y)+(1-\alpha^t)(k, k)=(\tilde{k}^t, k'^{t+1}), t=0, 1, \ldots$を考える。$D$ の凸性から$(\tilde{k}^t, k'^{t+1})\in D, t=0, 1, \ldots$である。$t=0$ に対しては$(\tilde{k}^0, k'^1)=(x, y)$である。$0<\alpha<1$ より，$t\to\infty$とすると $\alpha^t\to 0$ なので，$(\tilde{k}'^t, k'^{t+1})\to(k, k)$となる。定義より $k'^{t+1}=k-\alpha^t(k-y)$で $\tilde{k}^{t+1}=k-\alpha^{t+1}(k-x)$であるが，$(y-\alpha x)>(k-\alpha k)$ならば $\alpha(k-x)>(k-y)$となるので $\alpha^{t+1}(k-x)>\alpha^t(k-x)$となり，故に，$k'^{t+1}>\tilde{k}^{t+1}$となる。$y>x$ なので，１に近い$\alpha(>0)$に対して$(y-\alpha x)\geqq y-x>(k-\alpha k)$となる。したがって，$(\tilde{k}^t, k'^{t+1})\in D$ と自由処分によって$(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})\in D$ となり，結果として$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$は k に近づいていく経路となる。

特に $k=\bar{k}$ とすれば，u の凹性と自由処分から $u(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})-\bar{u}\geqq u(\tilde{k}^t, k'^{t+1})-u(\bar{k}, \bar{k})\geqq(1-\alpha^t)u(\bar{k}, \bar{k})+\alpha^t u(x, y)-u(\bar{k}, \bar{k})=\alpha^t(u(x, y)-\bar{u})$となるので，この関係を総和すれば$\sum_{t=0}^{\infty}(u(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})-\bar{u})\geqq(u(x, y)-\bar{u})/(1-\alpha)>-\infty$となり，$\bar{k}$ に近づいて行く経路$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$良好である。□

良好な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$については，その経路の収束に関して $k^t\to\bar{k}(t\to\infty)$とな

る性質がある。

命題１　実現可能な良好な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対しては，$k^t \to \bar{k}(t\to\infty)$となる。

証明． 全ての t に対して $\delta_t = \delta(k^{t-1}, k^t)(\geqq 0)$とすると，損失価値の定義より，$u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u} = pk^{t-1} - pk^t - \delta_t$となるが，$u$ の強凹性から$(k^{t-1}, k^t) \neq (\bar{k}, \bar{k})$に対しては $\delta_t > 0$となっている。そこで，この式を $t = 1$から Tまで総和すると，$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) = pk^0 - pk^T - \sum_{t=1}^{T}\delta_t \leqq pk^0 - \sum_{t=1}^{T}\delta_t$となる。もしも $k^T \to \bar{k}(T\to\infty)$とならないとすると，ある $\epsilon > 0$が存在して無限に多くの T について $\|k^T - \bar{k}\| > \epsilon$ となる。すると，補題４によって $\eta = \max(k^0, \zeta)$とするとある $\delta > 0$が存在して，そのような無限に多くの T については $\delta_T > \delta$ となる。したがって，全ての T に対して $\delta_T \geqq 0$なので，$T\to\infty$とすると$\sum_{t=1}^{T}\delta_t \to \infty$となって$(pk^0 - \sum_{t=1}^{T}\delta_t) \to -\infty$となり，上式の右辺は単調減少列で$\to -\infty$となる。故に，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) = \sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) = -\infty$となり，$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が良好であることに矛盾する。したがって，$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が良好であれば $k^t \to \bar{k}(t\to\infty)$となる。□

$K = \{k : \mathbf{k}^G(k) \neq \emptyset\} = \{k : \exists\{k^t\}_{t=0}^{\infty}, k^0 = k, \liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) > -\infty\}$として，そこから始まる良好な経路が存在するような初期資本ストックの集合とする。$k^0 \in K$であれば k^0から始まる良好な経路が存在するので，補題６によって k^0から始まる最適経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$は良好であり，故に，命題１によって $k^t \to \bar{k}(t\to\infty)$となる。したがって，将来効用を割引かない定常既約型一般ラムゼーモデルの最適経路に関するターンパイク定理が成立する。

系１　$\mathbf{k}^G(k^0) \neq \emptyset$であれば，$k^0$からの最適経路$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$について，$\hat{k}^t \to \bar{k}(t\to\infty)$となる。

また，補題５から任意の実現可能な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して，$\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) > -\infty$であるか，または，$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) = -\infty$である事が判明している。しかし，前者の $\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) > -\infty$のケースでは，定義より経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が良好なので$\sum_{t=1}^{T}\delta(k^{t-1}, k^t) < \infty$であり，また，命題１から $k^t \to \bar{k}(t\to\infty)$となるので，$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) = pk^0 - pk^T - \sum_{t=1}^{T}\delta(k^{t-1}, k^t)$より$\sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) = pk^0 - p\bar{k} - \sum_{t=1}^{\infty}$

$\delta(k^{t-1}, k^t) \in R$ となり，任意の実現可能な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して，$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})=\sum_{t=1}^{\infty}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u}) \in R\cup\{-\infty\}$となる。したがって，以下の結果が成立する。

系２　任意の実現可能な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して，$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{\mathrm{u}})=\sum_{t=1}^{\infty}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u}) \in R\cup\{-\infty\}$である。

４　最適経路の存在

以上の結果に基づいて本節では最適経路の存在に関する結果を示す。最初に，全ての t に対して $\hat{k}^t=\bar{k}$ となる定常経路$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$は，$k^0=\bar{k}$ となる任意の経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に追い付く事ができて，$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$は $k^0=\bar{k}$ からの最適経路である事を示す。

命題２　$\hat{k}^t=\bar{k}, t=0, 1, \cdot\cdot$となる経路$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$は $k^0=\bar{k}$ からの一意的な最適経路である。

証明． 補題３から，ある $p\geqq 0$が存在して全ての$(z, w)\in D$に対して $u(z,w)+pw-pz\leqq\bar{u}$ となるが，仮定１の強凹性から$(z, w)\neq(\bar{k}, \bar{k})$であればこの不等式は強くなる。$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$を $k^0=\bar{k}$ となっている任意の経路とする。全ての t に対して $\delta_t=\delta(k^{t-1}, k^t)(\geqq 0)$とすると，$u$ の強凹性から$(k^{t-1}, k^t)\neq(\bar{k}, \bar{k})$に対しては $\delta_t>0$である。損失価値の定義より，$u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u}=pk^{t-1}-pk^t-\delta_t$となるので，それを $t=1$から T まで総和すると，$k^0=\bar{k}$ より$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})=p\bar{k}-pk^T-\sum_{t=1}^{T}\delta_t$となる。補題２より$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$は有界である。もしも $k^T\to\bar{k}(T\to\infty)$とならないとすると，ある $\epsilon>0$が存在して，無限に多くの T について $\|k^T-\bar{k}\|>\epsilon$ となるが，補題４によってある $\delta>0$が存在して，そのような無限に多くの T については $\delta_T>\delta$ となる。故に，全ての T に対して $\delta_T\geqq 0$なので，$T\to\infty$とすると$\sum_{t=1}^{T}\delta_t\to\infty$となり，$p\bar{k}-pk^T-\sum_{t=1}^{T}\delta_t\leqq p\bar{k}-\sum_{t=1}^{T}\delta_t$より上式の右辺は単調減少列なので，$T\to\infty$とすると$-\infty$に発散する。したがって，$\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})=\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^T)-u)=-\infty<0$となる。一方，$k^T\to\bar{k}(T\to\infty)$となれば，$(p\bar{k}-pk^T)\to 0\ (T\to\infty)$であり，$\epsilon>0$を所与とすると，十分に大きい任意の T に対して$(p\bar{k}-pk^T)$

$<\epsilon$ であり，全ての t に対して $\delta_t \geqq 0$ より $-\sum_{t=1}^{T} \delta_t \leqq 0$ なので， $p\bar{k} - pk^T - \sum_{t=1}^{T} \delta_t \leqq (p\bar{k} - pk^T) < \epsilon$ となって，$\limsup_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t) - u) < \epsilon$ となる。そこで $\epsilon \to 0$ とすれば，$\limsup_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t) - \bar{u}) \leqq 0$ となり，したがって, $\hat{k}^t = \bar{k}$, $t = 0, 1, \cdot\cdot$ となる経路$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$ は $k^0 = \bar{k}$ からの最適経路である。

$\{k'^t\}_{t=1}^{\infty}$が $k^0 = \bar{k}$ からの$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$とは異なる最適経路として，$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$がある t' において$(k'^{t-1}, k'^t) \neq (\bar{k}, \bar{k})$となっているとする。まず，$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$を $\bar{k}$ からの実現可能な経路とみなせば，最適性の定義より $\limsup_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T}(\bar{u} - u(k'^{t-1}, k'^t)) = -\liminf_{T\to\infty} \sum_{t-1}^{T}(u(k^{t-1}, k'^t) - \bar{u})) \leqq 0$ となるので，$\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} (u(k'^{t-1}, k'^t) - \bar{u})) \geqq 0$ である。全ての t に対して $\delta'_t = \delta(k'^{t-1}, k'^t)$とする。$k'^t \to \bar{k}(t\to\infty)$とならないとすると$\sum_{t=1}^{T} \delta'_t \uparrow \infty (T\to\infty)$となるので $p\bar{k} - \sum_{t=1}^{T} \delta'_t$ は$-\infty$に向かう単調減少列になり，故に，$\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t) - \bar{u}) = p\bar{k} - pk'^T - \sum_{t=1}^{T} \delta'_t \leqq p\bar{k} - \sum_{t=1}^{T} \delta'_t$より $\inf_{s \geqq T} \sum_{t=1}^{s}(u(k'^{t-1}, k'^t) - \bar{u})) \leqq p\bar{k} - \sum_{t=1}^{T} \delta'_t$となって $\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t) - \bar{u})) = -\infty < 0$ となり，$\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} (u(k'^{t-1}, k'^t) - \bar{u})) \geqq 0$ に対して矛盾が起こる。故に $k'^t \to \bar{k}(t\to\infty)$である。そして，ある t'において$(k'^{t'-1}, k'^{t'}) \neq (\bar{k}, \bar{k})$となっているので，補題４と $\delta(\bar{k}, \bar{k}) = 0$ となる資本ストックの一意性から, ある十分に小さい $\epsilon > 0$ に対して $\delta'_{t'} > \epsilon$ となって十分に大きい任意の T に対して$-\sum_{t=1}^{T} \delta'_t \leqq -\epsilon$ となるが，$k'^t \to \bar{k}(t\to\infty)$より十分に大きい任意の T に対して$(p\bar{k} - pk'^T) < \epsilon/2$ となって $p\bar{k} - pk'^T - \sum_{t=1}^{T} \delta'_t < \epsilon/2 - \epsilon = -\epsilon/2$ となり，故に，十分に大きい任意の T に対して$\sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t) - \bar{u}) < -\epsilon/2$ となる。すると, $\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t) - \bar{u}) \leqq -\epsilon/2 < 0$ となるが，これは再び $\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T}(u(k'^{t-1}, k'^t) - \bar{u})) \geqq 0$ に矛盾する。したがって，$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$が $k^0 = \bar{k}$ からの最適経路であれば全ての t において $k'^t = \bar{k}$ となり$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$は $k^0 = \bar{k}$ からの一意的な最適経路である。□

命題２は最大効用維持可能資本ストック $\bar{k}$ から実現可能な経路の中に(実際には，全ての t において $k^t = \bar{k}$ となる)最適経路が存在すると解釈できるが，k^0が $\bar{k}$ と異なるケースでは，k^0が拡張可能な資本ストックであれば，k^0から実現可能な経路の中に最適経路が存在する事を示せる。まず，総損失価値$\sum_{t=0}^{\infty}$

$\delta(k^t, k^{t+1})$を最小化する経路が最適経路の候補なので，その最小解の存在を確立するために，総損失価値$\sum_{t=0}^{\infty} \delta(k^t, k^{t+1})$の下半連続性を示す。

補題８　実行可能な経路$\{k^{mt}\}_{t=0}^{\infty}$, $m=1, 2, \ldots$, $\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して，各 $t=0, 1, 2, \ldots$おいて $k^{mt} \to k'^t (m \to \infty)$となれば，$\liminf_{m\to\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \delta(k^{mt}, k^{mt+1}) \geqq \sum_{t=0}^{\infty} \delta(k'^t, k'^{t+1})$となる[23)]。

証明. 実行可能な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$に対して$\chi^T(\{k^t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{T} \delta(k^t, k^{t+1})$（$\geqq 0$）と定義する。$\delta(k^t, k^{t+1})$の定義より $\delta(k^t, k^{t+1}) = \bar{u} - u(k^t, k^{t+1}) + pk^t - pk^{t+1}$（$\geqq 0$）であるが，$-u(k^t, k^{t+1})$は u の凹性と閉性から D 上で下半連続であり，$pk^t - pk^{t+1}$も連続なので下半連続であり，そして下半連続関数の有限和も下半連続なので，$\delta(k^t, k^{t+1})$も D 上で下半連続である。そこで，$\delta(k^t, k^{t+1})$を $D \times D \times \ldots$（可算無限個）上の関数と見なすと，各 $s=0, 1, 2, \ldots$おいて $k^{ms} \to k'^s$（$m \to \infty$）であれば，$k^{mt(t+1)} \to k'^{t(t+1)}$（$m \to \infty$）なので，$D \times D \times \ldots$上で（座標別収束の位相（＝直積位相）に関して）下半連続である。そして，下半連続な関数の有限和も下半連続なので，$\chi^T(\{k^t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{T} \delta(k^t, k^{t+1})$も $D \times D \times \ldots$上で（座標別収束の位相に関して）下半連続である。更に，$\delta(k^{T+1}, k^{T+2}) \geqq 0$より$\chi^{T+1}(\{k^t\}_{t=0}^{\infty}) \geqq \chi^T(\{k^t\}_{t=0}^{\infty})$となるので，$(\chi^T(\{k^t\}_{t=0}^{\infty}))_{T=0}^{\infty}$は単調増加列で，$\lim_{T\to\infty} \chi^T(\{k^t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta(k^t, k^{t+1})$（$\geqq 0$）となる。そして，一般に下半連続な関数列の上限によって定義される関数も下半連続なので，$\lim_{T\to\infty} \chi^T(\{k^t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta(k^t, k^{t+1})$も $D \times D \times \ldots$上で（座標別収束の位相に関して）下半連続である。したがって，各 $t=0, 1, 2, \ldots$おいて $k^{mt} \to k'^t$（$m \to \infty$）となれば，$\liminf_{m\to\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \delta(k^{mt}, k^{mt+1}) \geqq \sum_{t=0}^{\infty} \delta(k'^t, k'^{t+1})$となる。□

この総損失価値$\sum_{t=0}^{\infty} \delta(k^t, k^{t+1})$の下半連続性に関する補題を利用すると，$k^0$からの最適経路を構成できて，本稿の目的である最適経路の存在を示す事ができる。

定理１　$\boldsymbol{k}^G(k^0) \neq \emptyset$ であれば，k^0からの最適経路$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が存在する。

23）この証明では，ダナ/ル・ヴァン（2003, ch. 7, Prop. 7. 3. 2, p. 138–9, 2006, Prop. 1. 4. 2, p. 9–9）の手法を利用した。彼らは効用関数の連続性を仮定しているが，実際には，本稿でのように効用関数の上半連続性のみで十分である。

証明． $\Delta=\inf\{\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1}):\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)\}(\geqq 0)$とする。損失価値の定義より$\delta(k^t, k^{t+1})(\geqq 0)$なので$(\sum_{t=0}^{T}\delta(k^t, k^{t+1}))$は単調増加であり，$\Delta\geqq 0$である。また，損失価値に基づく良好な経路の特徴付けを用いると，$\boldsymbol{k}^G(k^0)\neq\emptyset$よりある経路$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)$に対して$\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k'^t, k'^{t+1})<\infty$となるので，$\Delta<\infty$である。下限の定義より，任意の$m$に対してある$\{k^{m,t}\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}^G(k^0)$が存在して$\Delta+1/m>\sum_{t=1}^{\infty}\delta(k^{m,t-1}, k^{m,t})(\geqq\Delta)$となる。$\Delta+1/m<\infty$より$\{k^{m,t}\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}^G(k^0)$である。補題２より$\sup_{m,t=1,2,\dots}(\|k^{m,t}\|)\}\leqq\max\{\|k^0\|,\zeta\}$なので，カントールの対角線論法を用いれば，$(\{k^{m,t}\}_{t=0}^{\infty})_{m=1}^{\infty}$のある部分列$(\{k^{m_q,t}\}_{t=0}^{\infty})_{q=1}^{\infty}$と$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が存在して，任意の$t=1,2,\dots$に対して$k^{m_q,t}\to\tilde{k}^t(q\to\infty)$となる。そこで一般性を失う事無く，$(\{k^{m,t}\}_{t=0}^{\infty})_{m=1}^{\infty}$を$(\{k^{m_q,t}\}_{t=0}^{\infty})_{q=1}^{\infty}$と想定して，任意の$t=1,2,\dots$に対して$k^{m,t}\to\tilde{k}^t(m\to\infty)$とする。$t$を任意に固定する。$(k^{m,t}, k^{m,t+1})\in D$より$(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})\in cl(D)$となるが，$(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})\in cl(D)\backslash D(=bd(D)\backslash D)$とすると，$u$の閉性から$u(k^{m,t}, k^{m,t+1})\to\infty(m\to\infty)$となる。補題２より$\sup_{m,t=1,2,\dots}(\|k^{m,t}\|)\}\leqq\max\{\|k^0\|,\zeta\}$なので，$pk^{m,t}-pk^{m,t+1}$も有界であり，故に，$\delta(k^{m,t}, k^{m,t+1})=\bar{u}-u(k^{m,t}, k^{m,t+1})+pk^{m,t}-pk^{m,t+1}$より，$\delta(k^{m,t}, k^{m,t+1})\to\infty(m\to\infty)$となるので，$\delta(k^{m,s}, k^{m,s+1})\geqq 0$より$\sum_{s=0}^{\infty}\delta(k^{m,s}, k^{m,s+1})\geqq\sum_{s=0}^{t}\delta(k^{m,s}, k^{m,s+1})(\geqq 0)\to\infty(m\to\infty)$となる。しかし，$\sum_{t=1}^{\infty}\delta(k^{m,t-1}, k^{m,t})<\Delta+1/m<\infty$なので，これは矛盾であり，故に，任意の$t=1,2,\dots$に対して$(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})\in D$で，$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$は$k^0$から実行可能で$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)$である。すると，任意の$t=1,2,\dots$に対して$k^{m,t}\to\tilde{k}^t(m\to\infty)$なので，補題８より$\liminf_{m\to\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\delta(k^{m,s}, k^{m,s+1})\geqq\sum_{s=0}^{\infty}\delta(\tilde{k}^s, \tilde{k}^{s+1})(\geqq\Delta)$となるが，$(\sum_{s=0}^{\infty}\delta(k^{m,s}, k^{m,s+1}))_{m=0}^{\infty}$はその作り方から単調減少列で$\Delta$に収束するので，$\liminf_{m\to\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\delta(k^{m,s}, k^{m,s+1})=\lim_{m\to\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\delta(k^{m,s}, k^{m,s+1})=\Delta$であり，$\sum_{s=0}^{\infty}\delta(\tilde{k}^s, \tilde{k}^{s+1})=\Delta(<\infty)$となる。$k^0$からの実行可能な経路$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$は$k^0$からの実行可能な経路の中で最少の総損失価値を実現している。そして，損失価値による良好な経路の特徴付けによって，$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が$k^0$からの良好な経路である。したがって，$\{\tilde{k}^t\}_{t=1}^{\infty}\in\boldsymbol{k}^G(k^0)$であり，系１より$\tilde{k}^t\to\bar{k}(t\to\infty)$となる。すると，系２より$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)-\bar{u}))=\sum_{t=1}^{\infty}(u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)-\bar{u}))\in R$

$\cup\{-\infty\}$であるが，$\delta(\tilde{k}^s, \tilde{k}^{s+1})$の定義より，$\sum_{t=1}^{T}(u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)-\bar{u})=pk^0-p\tilde{k}^T-\sum_{t=0}^{T}\delta(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})$であり，系１より右辺が $pk^0-p\bar{k}-\sum_{t=0}^{\infty}\delta(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})$に収束するので，$\sum_{t=1}^{\infty}(u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)-\bar{u})=pk^0-p\bar{k}-\sum_{t=0}^{\infty}\delta(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})=pk^0-p\bar{k}-\Delta\,(<\infty)$となる。$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が k^0からの最適経路である事を示す

k^0から実現可能な経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)$を所与とする。$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が良好でなければ，$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})\to-\infty\,(T\to\infty)$なので，任意の T に対して$\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))=\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})-\sum_{t=1}^{T}(u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)-\bar{u})$より，右辺の第１項が$-\infty$に収束し，第２項が有限の大きさへ収束するので，右辺は$-\infty$に収束して，$\sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))=\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))=\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))=-\infty$となる。一方，$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$が良好であれば，系１から $k^t\to\bar{k}\,(t\to\infty)$となるので，$\sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})=pk^0-p\bar{k}-\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1})\,(<\infty)$となる。すると，

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))&=\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})-\sum_{t=1}^{T}(u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)-\bar{u})\\&=p\tilde{k}^T-pk^T+\sum_{t=0}^{T}\delta(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})-\sum_{t=0}^{T}\delta(k^t, k^{t+1})\quad(*)\end{aligned}$$

において，$p\tilde{k}^T-pk^T\to p\bar{k}-p\bar{k}=0\,(T\to\infty)$, $\sum_{t=0}^{T}\delta(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})\to\Delta\,(T\to\infty)$, $\sum_{t=0}^{T}\delta(k^t, k^{t+1})\to\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1})\,(T\to\infty)$となる事から，(*)式の右辺は $\Delta-\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1})$に収束し，$\Delta\leqq\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1})$から$\sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))=\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))=\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))\leqq 0$となる。したがって，$k^0$から実現可能な任意の経路$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)$に対して$\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))\leqq 0$となるので，$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$は k^0からの最適経路である。□

ダナ/ル・ヴァン（2003, Ch. 7, Th. 7. 3. 1, p. 139, 2006, Prop. 1. 4. 1, p. 10）では補題８とワイエルシュトラスの最大定理に基づいて最適経路の存在のみを示しているが，上記の証明では，カントールの対角線論法を用いて最適経路の候補を実際に構成するマッケンジー（1986, Th. 5. 2, pp. 1295–7）の議論を利用して，具体的に最適経路$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$を構成している。上記のダナ/ル・ヴァンでは効用関

数の連続性と技術集合 D の閉性(実際にはコンパクト性)を仮定しているが，本稿ではマッケンジー(1986)と同様に効用関数の上半連続性と閉性のみを利用しているので，仮定は弱められている。そして，これらの証明で基本となっているのは，直接的に $\sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^t))$ の上半連続性を示して最適経路の存在を示すのではなくて，総損失価値 $\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1})$ の非負性を利用してその下半連続性を示して，間接的に最適経路の存在を示しているという事である。

一方，将来効用を $\rho\in(0,1)$ で割引くケースでは，補題1と $\rho\in(0,1)$ によって $\sum_{t=1}^{\infty}\rho^t u(k^{t-1}, k^t)$ の上半連続性を直接的に示せるので，この事からこのケースにおける最適経路の存在を示せる。その際の要点は，補題1と $\rho\in(0,1)$ によって，ある $\mu>0$ が存在して任意の経路 $\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)$ に対して $\sum_{t=1}^{\infty}\rho^t u(k^{t-1}, k^t)\leqq\sum_{t=1}^{\infty}\rho^t\mu=\mu/(1-\rho)$ となるので，任意の $\varepsilon>0$ に対して T^{ε} を $\sum_{t=T^{\varepsilon}}^{\infty}\rho^t\mu<\varepsilon$ を満たすように選べば，任意の $T>T^{\varepsilon}$ と任意の経路 $\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)$ に対して $\sum_{t=T}^{\infty}\rho^t u(k^{t-1}, k^t)\leqq\varepsilon$ とできる，という事である。これは $\sum_{t=1}^{\infty}\rho^t \mathrm{u}(k^{t-1}, k^t)=-\infty$ のケースでも成立する。しかし，本稿の将来効用の割引のないケースでは，任意の経路 $\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)$ に対して $\sum_{t=1}^{\infty}u(k^{t-1}, k^t)\leqq pk^0$ となってはいるが，所与の $\varepsilon>0$ に対して，任意の経路 $\{k^t\}_{t=0}^{\infty}\in\boldsymbol{k}(k^0)$ から独立に T^{ε} を選んで任意の $T(>T^{\varepsilon})$ に対して $\sum_{t=1}^{\infty}u(k^{t-1}, k^t)\leqq\varepsilon$ とする事が示せないので，将来効用に割引のあるケースのように直接的には $\sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^t)$ の上半連続性を示す事はできず，そのために総損失価値 $\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1})$ の下半連続性を確立するという迂回的な手法を利用して，間接的に $\sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^t)$ の上半連続性を示している。

また，本節の将来効用割引のないケースでは，カントールの対角線論法を用いて構成した経路 $\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$ が総損失価値 $\sum_{t=0}^{\infty}\delta(k^t, k^{t+1})$ を最少にしているので良好な経路であり，故に，$\tilde{k}^t\to\tilde{k}(t\to\infty)$ となるという事を用いて経路 $\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$ の最適性を示しているが，良好な経路 $\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ に対して $k^t\to\bar{k}(t\to\infty)$ が成立すること事を確立する際に，効用関数の強凹性に基づく $\bar{k}$ の一意性を利用している。

一方，将来効用の割引があるケースでは，効用関数の凹性だけで直接的に

$\sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^t)$の上半連続性が示せるので，将来効用の割引の無いケースのような，効用関数の強凹性に基づく $\bar{k}$ の一意性，総損失価値の最小化を利用した最適経路の候補の構成，そして，経路の良好性に基づく $\bar{k}$ への収束，といった議論を使う必要がないので，効用関数の強凹性は必要なく，効用関数の上半連続性(と閉性)のみで十分である。

ところで，補題７より k^0が拡張可能資本ストックであれば，最大効用維持可能資本ストック $\bar{k}$ に収束する良好な経路が存在するので $\boldsymbol{k}^G(k^0)\neq\emptyset$ であり，故に，定理１より最適経路が存在する。したがって，以下の結果が成立する。

系３　k^0が拡張可能な資本ストックであれば，k^0からの最適経路$\{\hat{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が存在する。

将来効用の割引がないケースにおいて効用関数が凹性だけが仮定されたケースでも，定理１の証明の最後の部分で用いた(*)式の最右辺の第１項の極限に関して$\liminf_{T\to\infty}(p\tilde{k}^T-pk^T)\leqq 0$ の成立を確立できれば，依然として $\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1},k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))\leqq 0$ が成立して，経路$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$の最適性を示す事ができる。そのような状況の一つとして，最大維持可能効用を実現する資本ストック$(\bar{k}, \bar{k})$の一意性がある。そこで次の仮定をする。

仮定１′　効用関数 u は凹かつ閉で，集合 D は凸である。

仮定５　最大維持可能効用 $\bar{u}=\max\{\mathrm{u}(x, x):(x, x)\in D\}$を実現する資本ストック$(\bar{k}, \bar{k})$が一意的である。

このような状況の下でも以下の様にして最適経路の存在を示せる。今$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$を良好な経路とすると，その特徴付けに関する条件より$\exists\lambda>\infty$, $\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})\geqq\lambda$, $\forall\, T\geqq 1, 2, \ldots$となるが，$k'^t=\sum_{s=0}^{t}k^s/(\mathrm{t}+1)$, $t=1, 2, \ldots$, $k''^{t+1}=\sum_{s=1}^{t+1}k^s/(t+1)$, $t=1, 2,\ldots$と定義すると，D の凸性から$(k'^t, k''^{t+1})\in D$, $t=1, 2, \ldots$となるので，u の凹性より，$(u(k'^{T-1}, k''^T)-\bar{u})\geqq\sum_{t=1}^{T}((u(k^{t-1}, k^t)-\bar{u})/(T+1)\geqq\lambda/(T+1)$となる。また，$\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$は実現可能なので補題２より有界であり，ゆえに，$\{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$,$\{k''^t\}_{t=1}^{\infty}$も有界となって，これらの点列には収束部分列があり，そこで一般性を失うことなく，$k'^t\to k'$, $k''^t\to k''$$(t\to\infty)$として，$(k'^{T-1}, k''^T)\to(k', k'')$$(T\to\infty)$とする。更に，$\{k^t\}_{t=1}^{\infty}$の有界性と $k''^T-k'^{T-1}$

$=(k^T-k^0)/(T+1)\to 0(T\to\infty)$より $k'=k''$としてよい。そして，$(k', k')\in bd(D)\setminus D$であれば，$u(k'^{T-1}, k''^{T})\to-\infty(T\to\infty)$となるので，十分に大きい$T$に対して$(u(k'^{T-1}, k''^{T})-\bar{u})<\lambda/(T+1)$となって矛盾が起こるので，$(k', k')\in int(D)$かまたは$(k', k')\in(bd(D)\cap D)$となる。この時，$(k', k')\in int(D)$ならば$u$の$int(D)$上での連続性を考慮すれば，$T\to\infty$とすると$(u(k', k')-u(\bar{k}, \bar{k}))\geqq 0$となり，また，$(k', k')\in(bd(\mathrm{D})\cap D)$ならば$u$の閉性から，やはり$(u(k', k')-u(\bar{k}, \bar{k}))=\limsup_{T\to\infty}(u(k'^{T-1}, k''^{T})-u(\bar{k}, \bar{k}))\geqq 0$となる。すると，$(k', k')$は一つの維持可能資本ストックで$u(\bar{k}, \bar{k})$と同程度の効用水準をもたらすので，仮定５の$(\bar{k}, \bar{k})$の一意性から$(\bar{k}, \bar{k})=(k', k')$となる。したがって，$k'^t(k''^t)\to\bar{k}(T\to\infty)$となる。そこで，二つの良好な経路$\{\vec{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\underrightarrow{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$を考えると，$\vec{k}'^t=\sum_{s=0}^{t}\vec{k}^s/(t+1)\to\bar{k}(T\to\infty)$, $\underrightarrow{k}'^t=\sum_{s=0}^{t}\underrightarrow{k}^s/(T+1)\to\bar{k}(T\to\infty)$となるので，$\liminf_{T\to\infty}(p\vec{k}^T-p\underrightarrow{k}^T)\leqq\liminf_{T\to\infty}p(\sum_{t=0}^{T}\vec{k}^t-\sum_{t=0}^{T}\underrightarrow{k}^t)/(T+1)=\liminf_{T\to\infty}p(\vec{k}'^T-\underrightarrow{k}'^T)=\lim_{T\to\infty}p(\vec{k}'^T-\underrightarrow{k}'^T)=p\lim_{T\to\infty}(\vec{k}'^T-\underrightarrow{k}'^T)=p(\bar{k}-\bar{k})=0$となる[24)]。すると，定理１の証明のように，$\boldsymbol{k}^G(k^0)\neq\emptyset$で$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が最少の総損失価値$\sum_{t=0}^{\infty}\delta(\tilde{k}^t, \tilde{k}^{t+1})$を実現しているとすると，$\limsup_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(u(k^{t-1}, k^t)-u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t))\leqq\limsup_{T\to\infty}(\sum_{t=1}^{T}\delta(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)-\sum_{t=1}^{T}\delta(k^{t-1}, k^t))+\liminf_{T\to\infty}(p\tilde{k}^T-pk^T)=\lim_{T\to\infty}(\sum_{t=1}^{T}\delta(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)-\sum_{t=1}^{T}\delta(k^{t-1}, k^t))=\sum_{t=1}^{\infty}\delta(\tilde{k}^{t-1},\tilde{k}^t)-\sum_{t=1}^{\infty}\delta(k^{t-1}, k^t)\leqq 0$となるので，$k^0$からの経路$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が最適経路である。したがって，次が成立する。

定理２　仮定*1'*，*2*，*3*，*4*，*5*の下では，$\boldsymbol{k}^G(k^0)\neq\emptyset$であれば$k^0$からの最適経路$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が存在する。

また，k^0が拡張可能な資本ストックであれば$\boldsymbol{k}^G(k^0)\neq\emptyset$となるので，系３と同様にして，次が成立する。

系４　仮定*1'*，*2*，*3*，*4*，*5*の下でk^0が拡張可能な資本ストックであれば，k^0からの最適経路$\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^{\infty}$が存在する。

24）一般に数列$(a_t)_{t=1}^{\infty}$に対して$\lim_{t\to\infty}\sum_{s=1}^{t}(a_s)/t$が存在すれば$\liminf_{t\to\infty}a_t\leqq\lim_{t\to\infty}(\sum_{s=1}^{t}a_s)/t\leqq\limsup_{t\to\infty}a_t$となる。

5　終わりに

以上で将来効用の割引が無いケースの最適経路の存在に関する基本的な議論が終了したが, そこで基本となっているのは, 直接的に$\sum_{t=1}^{\infty}(u(k^{t-1}, k^{t})$の上半連続性を示して最適経路の存在を示すのではなくて，総損失価値$\sum_{t=1}^{\infty}\delta(k^{t-1}, k^{t})$の非負性を利用してその下半連続性を示し，更に，良好な経路が，故に最適経路が，最大効用維持可能資本ストック $\bar{k}$ に収束しに行くというターンパイク定理を利用して，間接的に最適経路の存在を示しているという事である。これに対して，将来効用を $\rho\in(0,1)$で割引くケースでは，最適経路が最大効用維持可能資本ストックに収束しに行くというターンパイク定理を利用しなくても，補題１と $\rho\in(0,1)$によって，$\sum_{t=1}^{\infty}\rho^{t}u(k^{t-1}, k^{t})$の上半連続性を直接的に確立できるので，この事から最適経路の存在を示す事ができる。特に，u が下に有界とされる事が多いが，仮定１'のように閉であれば下に有界でなくてもいい事には注目すべきである[25)]。

ただし，将来効用の割引が無いケースの最適経路の収束に関するターンパイク定理は簡明に証明できたのであるが，それに比べると，将来効用の割引があるケースの最適経路の収束に関するターンパイク定理は，効用関数 u の強凹性の下でも甚だ困難である。実際，割引因子 $\rho\in(0,1)$に依存して最適定常経路を実現する維持可能資本ストック$(\bar{k}^{\rho}, \bar{k}^{\rho})$が存在するが，$\varepsilon>0$に依存してある割引因子 $\rho_{\varepsilon}\in(0,1)$が存在して，$\rho\in(\rho_{\varepsilon},1)$の時の最適経路$\{\hat{k}_{\rho}^{t}\}_{t=0}^{\infty}$が十分先の時点で$(\bar{k}^{\rho}, \bar{k}^{\rho})$の ϵ－近傍に入って来るという事は示せる。しかし，$\epsilon>0$から独立にある $\bar{\rho}\in(0,1)$が決まって，$\rho\in(\bar{\rho},1)$の時の最適経路$\{\hat{k}_{\rho}^{t}\}_{t=0}^{\infty}$が十分先の時点で$(\bar{k}^{\rho}, \bar{k}^{\rho})$の ϵ－近傍に入って来るという漸近的なターンパイク定理の成立は示せず，$\epsilon>0$をより小さい $\epsilon'(>0)<\epsilon$ にすれば対応する $\rho_{\epsilon'}\in(0,1)$も

25）西村/矢野（2007, 第６章付録）でも多部門モデルの枠組みで将来効用割引のあるケースの最適経路の存在が，効用関数 u についての凹性を課さずに示されているが，そこでは $u(0)=0$として下に有界としている。しかし，補題１は効用関数 u の凹性がなくても u の上半連続性と閉性があれば成立するので，実際には効用関数 u の凹性や下方への有界性がなくてもその閉性があれば，$\sum_{t=1}^{\infty}\rho^{t}u(k^{t-1}, k^{t})$の上半連続性が成立して最適経路の存在が示せる。

$\rho_{\epsilon'}>\rho_\epsilon$とする必要がある。そのために，この結果は近傍ターンパイク定理と呼ばれ，マッケンジー(2002, 第７章第６節)でも効用関数 u の強凹性の下でその証明が行われている。そして，$\epsilon>0$から独立にある $\rho\in(0,1)$が決まって，$\rho\in(\rho,1)$の時の最適経路$\{\hat{k}_\rho^t\}_{t=0}^\infty$が十分先の時点で$(\bar{k}^\rho,\ \bar{k}^\rho)$の ϵ－近傍に入って来るという漸近的なターンパイク定理を示すためには，効用関数 u が更に連続２階微分可能でそのヘッセ行列が負値定符号という条件が必要となる。この結果はマッケンジー(1986, 第８節定理8.4, p.1315–７)で示されているが，マッケンジー(2002, 第７章)ではその結果に触れているだけでその証明は行われていない[26]。

参考文献

[1] Brock,W.A.(1970): “On existence of weakly maximal programmes in a multisector economy” *Review of Economic Studies,* 37, pp.275–80

[2] Dana, R. A. and C. Le Van(2003): *Dynamic Programming in Economics* Kluwer Academic Press(Boston, MA, USA)

[3] Dana, R. A. and C. Le Van(2006): “Optimal growth without discouting” Ch. 1 of *Handbook on Optimal Growth Vol.1 Discrete Time ed. by Dana et. al.* Springer(New York, NY, USA)pp.1–17

[4] Gale, D.(1967): “On optimal development in a multi-sector economy” *Review of Economic Studies,* 34, pp.1–18

[5] 丸山徹(2002):『経済数学』知泉書館

[6] McKenzie, L. W.(1982): “A promal route to the turnpike and Liapounov stability” *Journal of Economic Theory,* 27, pp.194–209

[7] ――――――――.(1983): “Turnpike theory, dicounted utility, and the von Neumann facet” *Journal of Economic Theory,* 30, pp.330–52

[8] ――――――――.(1986): “Optimal economic growth, turnpike theorems, and comparative dynamics” Ch. 26 of *Handbook of Mathematical Economics Vol.III ed. by Arrow K.J. and M.D. Interigator.* North-Holland(Amsterdam, Holland)pp.1281–358

26) ダナ／ル・ヴァン(2003, 第８章)では，これらの近傍ターンパイク定理と漸近ターンパイク定理が１財モデルの枠組みで簡明に行われており，また，西村–矢野(2007, 第６章)でも多部門モデルの枠組みで説明されていて，各々参考になる。

[9] ――――――――――.(2002): *Classical General Equilibrium Theory* MIT Press (Boston, MA, USA)

[10] 西村和雄/矢野誠(2007)：『マクロ経済動学』岩波書店

[11] Ramsey, F.A.(1928): “A mathematical theory of saving” *Economic Journal,* 38, pp.543-59

[12] Rockafellar, R.T.(1970) *Convex Analysis* Princeton Univ. Press(Princeton, NJ, U.S.A)

[13] 武隈慎一(2001)：『数理経済学』新世社

[14] von Weizsäcker, C.C.(1965): “Existence of optimal programmes of accumulation for an innite horizon” *Review of Economic Studies,* 32, pp.85-104